

PETITS EXERCICES DE CALCULS
POUR FACILITER L'ASSIMILATION DU COURS

1. Soit $F(k, l) = k^a l^b$, où a, b sont des coefficients positifs, la fonction de production du bien y . Calculer la fonction d'offre de l'entreprise si le prix du bien y est p , et le prix des facteurs de production est respectivement r pour k et w pour l . En déduire la fonction de demande des facteurs de production.
2. Les fonctions de production des biens X et Y s'écrivent:

$$F_X(L_X) = \alpha_X \sqrt{L_X}$$

$$F_Y(L_Y) = \alpha_Y \sqrt{L_Y}$$

où L_X et L_Y représentent les quantités de travail utilisées pour produire ces deux biens. Calculer la frontière des possibilités de production d'une économie où la quantité totale de travail disponible est L . En faire le graphique.

ELEMENTS DE CORRECTION

1. Le profit de l'entreprise s'écrit $\pi = py - rk - wl$. Les conditions du premier ordre de la maximisation du profit s'écrivent donc:

$$a \frac{y}{k} = \frac{r}{p}$$

$$b \frac{y}{l} = \frac{w}{p}$$

Si l'on remplace k et l par leur valeur (en fonction de y) dans la fonction de production, on obtient:

$$y = \left(a \frac{p}{r} y\right)^a \left(b \frac{p}{w} y\right)^b = \frac{a^a b^b}{r^a w^b} (py)^{a+b}.$$

Par suite

$$y(r, w, p) = \left(\frac{a^a b^b}{r^a w^b}\right)^{1/(1-a-b)} p^{(a+b)/(1-a-b)}$$

Les fonctions de demande de facteur de production s'écrivent donc:

$$k(r, w, p) = \frac{a}{r} py = \left(\frac{a}{r}\right)^{(1-b)/(1-a-b)} \left(\frac{b}{w}\right)^{b/(1-a-b)} p^{1/(1-a-b)}$$

$$l(r, w, p) = \frac{b}{w} py = \left(\frac{a}{r}\right)^{a/(1-a-b)} \left(\frac{b}{w}\right)^{(1-a)/(1-a-b)} p^{1/(1-a-b)}$$

2. La quantité du facteur de production L_X nécessaire pour la production de la quantité X du bien X s'écrit $L_X = (X/\alpha_X)^2$. De même pour le bien Y , la quantité de travail nécessaire est $L_Y = (Y/\alpha_Y)^2$. Par suite, la contrainte $L_X + L_Y \leq L$ s'écrit:

$$\left(\frac{X}{\alpha_X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\alpha_Y}\right)^2 \leq L.$$

L'équation de la frontière de production est donnée par le cas d'égalité. C'est un arc d'ellipse.