1. Dynamique d'apprentissage

1.1. Un modèle de duopole

- La demande adressée aux entreprises s'écrit:

$$\begin{aligned} d_1(p_1,p_2) &= \alpha - \beta p_1 + \gamma p_2 \\ d_2(p_1,p_2) &= \alpha - \beta p_2 + \gamma p_1 \end{aligned}$$

- Les entreprises ne prennent pas en compte l'impact des autres entreprises et considèrent que:

$$\begin{aligned} \hat{d}_1(p_1) &= a_1 - b_1 p_1 + \varepsilon_1 \\ \hat{d}_2(p_2) &= a_2 - b_2 p_2 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

- Les entreprises estiment les paramètres de la demande à partir des quantités et des prix observés aux périodes précédentes.
- Questions:
  - Le processus d'apprentissage converge-t-il?
  - Dans le cas d'une convergence, y-a-t-il convergence vers le prix d'équilibre obtenu quand l'information est parfaite?

- Equilibre de Cournot-Nash en information parfaite: (coûts unitaires normalisés à zéro)

$$\begin{aligned} \pi_1(p_1,p_2) &= p_1 d_1(p_1,p_2) \\ \pi_2(p_1,p_2) &= p_2 d_2(p_1,p_2) \end{aligned}$$

- Fonctions de meilleure réponse:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\alpha + \gamma p_2}{2\beta} \\ p_2 &= \frac{\alpha + \gamma p_1}{2\beta} \end{aligned}$$

- Equilibre de Nash:

$$p_1 = p_2 = \frac{\alpha}{2\beta - \gamma}$$

- Stratégie optimale si les interactions sont négligées:

$$p_1 = \frac{a_1}{2b_1}$$
$$p_2 = \frac{a_2}{2b_2}$$

1.2. Etude de la dynamique

- Estimation par les moindres carrés:

$$\hat{b}_i(T) = -\frac{\Sigma_{t=1}^{T}\left(d_i(t) - \bar{d}_i(T)\right)\left(p_i(t) - \bar{p}_i(T)\right)}{\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_i(t) - \bar{p}_i(T)\right)^2}$$
$$\hat{a}_i(T) = \bar{d}_i(T) + \hat{b}_i(T)\,\bar{p}_i(T)$$

avec

$$\bar{d}_i(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_i(t) \qquad \bar{p}_i(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} p_i(t)$$

- En utilisant la vraie relation:

$$\hat{b}_1(T) = \beta - \gamma\frac{\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_1(t) - \bar{p}_1(T)\right)\left(p_2(t) - \bar{p}_2(T)\right)}{\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_1(t) - \bar{p}_1(T)\right)^2}$$

- Relation récursive sur les prix...

$$\begin{aligned} p_1(T+1) &= \frac{\bar{d}_1(T) + \hat{b}_1(T)\,\bar{p}_1(T)}{2\hat{b}_1(T)} \\ &= \frac{1}{2}\bar{p}_1(T) + \frac{1}{2}\frac{\left[\alpha - \beta\bar{p}_1(T) + \gamma\bar{p}_2(T)\right]\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_1(t) - \bar{p}_1(T)\right)^2}{\beta\,\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_1(t) - \bar{p}_1(T)\right)^2 - \gamma\,\Sigma_{t=1}^{T}\left(p_1(t) - \bar{p}_1(T)\right)\left(p_2(t) - \bar{p}_2(T)\right)} \end{aligned}$$

1.3. Existence d'équilibre auto-entretenus

- Equilibre consistent avec les conjectures:

$$b_1^* = -\beta + \frac{\alpha + \gamma p_2^*}{p_1^*}$$
$$b_2^* = -\beta + \frac{\alpha + \gamma p_1^*}{p_2^*}$$

et

$$a_1^* = 2\left(\alpha - \beta p_1^* + \gamma p_2^*\right)$$
$$a_2^* = 2\left(\alpha - \beta p_2^* + \gamma p_1^*\right)$$

- Convergence vers un équilibre auto-entretenu:
  Si les paramètres b_1^* et b_2^* satisfont la condition

$$\gamma^2 \geq \left(\beta - b_1^*\right)\left(\beta - b_2^*\right) \geq 0$$

alors il existe $p_i(t = 1,2,3)$, tels que $\hat{a}_i(t = 4) = a_i^*$ et $\hat{b}_i(t = 4) = b_i^*$.