1. Dynamique non-linéaire: cycles et chaos

1.1. Equation fonctionnelle - Point fixes et convergence.

- L'équation fonctionnelle décrivant le comportement de l'économie s'écrit:

$$p_{t+1} = f(p_t)$$

- On suppose que les prix restent dans un compact K. Dans le cas uni-dimentionnel, $p_t \in [a,b]$ avec$f([a,b]) \subset [a,b]$.
- Il existe au moins un point fixe dans K.
- Diagramme des phases: $p_{t+1} > p_t \Leftrightarrow f(p_t) > p_t$.
- La dynamique autour des points d'équilibre dépend de la pente de $f(p)$ en ce point.
- Etude de la dynamique dans le cas suivant d'une fonction linéaire par morceaux:

$$p_{t+1} - p_* = a\,(p_t - p_*)$$

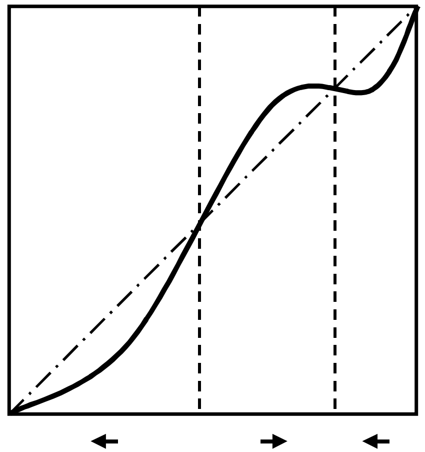

Figure 1.1:

Convergence: $0 < a < 1$

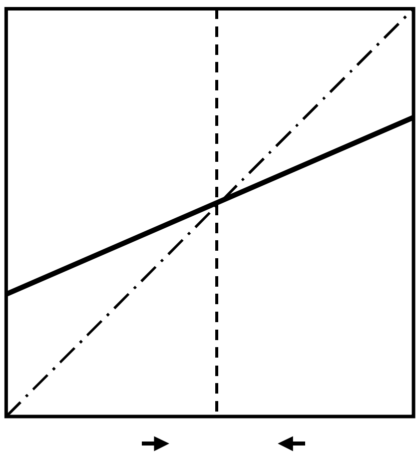

Figure 1.2:

Convergence en oscillant: $-1 < a < 0$

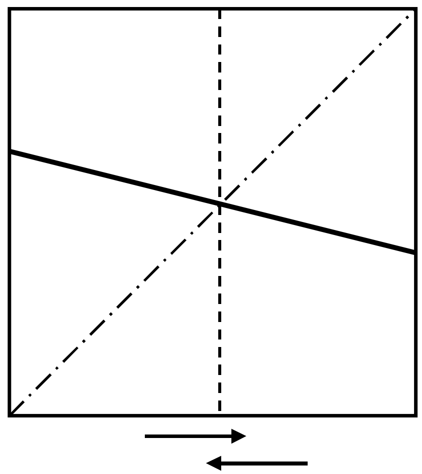

Figure 1.3:

Divergence: $a > 1$

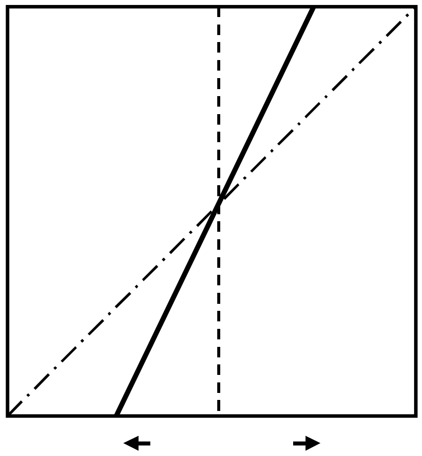

Figure 1.4:

Divergence en oscillant: $a < -1$

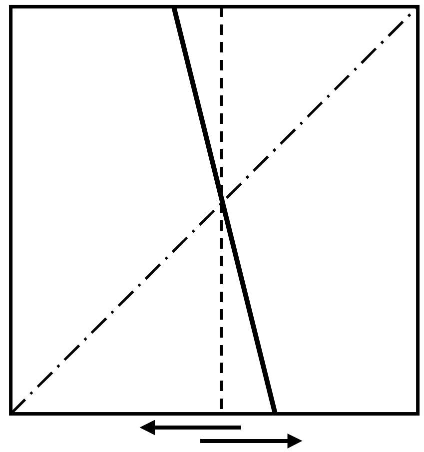

Figure 1.5:

1.2. Existence de cycles

- Après deux périodes...

$$p_{t+2} = f\left(p_{t+1}\right) = f^{(\circ 2)}\left(p_t\right)$$

  avec $f^{(\circ 2)}([a,b]) \subset [a,b]$. Donc $f^{(\circ 2)}$ admet au moins un point fixe.

- On suppose que $p_{t+1} = f(p_t)$ admet un unique point fixe $p^{(1)}$. C'est aussi un point fixe de $f^{(\circ 2)}$ et de $f^{(\circ n)}$.

- Existence de cycles d'ordre k : Il existe des valeurs de p pour lesquelles

$$\begin{aligned} f^{(\circ k)}(p) &= p, \\ f^{(\circ j)}(p) &\neq p, \quad j < k \end{aligned}$$

- Etude de la famille de fonctions:

$$f\left(p_t\right) = a\, p_t\left(1 - p_t\right) \qquad \forall\, p_t \in [0,1], \quad a > 1.$$

- Point d'équilibre:

$$f\left(p_*^{(1)}\right) = p_*^{(1)} = a\, p_*^{(1)}\left(1 - p_*^{(1)}\right)$$

  donc $p_*^{(1)} = 1 - 1/a$ ou $p_*^{(1)} = 0$.
  Stabilité:

$$f'(p) = a(1 - 2p)$$

  donc $f'\left(p_*^{(1)}\right) = 2 - a$.

- Après deux périodes:

$$f^{(\circ 2)}\left(p_t\right) = a^2\, p_t\left(1 - p_t\right)\left(1 - a\, p_t\left(1 - p_t\right)\right)$$

  On a: $df^{(\circ 2)}/dp = (df/dp)^2$ quand $p = p_*^{(1)}$.
  De plus $df^{(\circ 2)}/dp$ quand $df/dp = 0$.

- Les deux équilibres stables de $f^{(\circ 2)}$ apparaissent dès que l'équilibre de f devient instable.

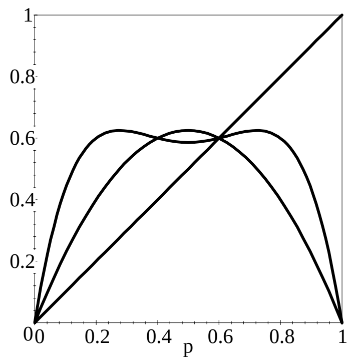

Figure 1.6:

Un point d'équilibre stable pour $f\left(p\right)$ et $f^{(\circ 2)}\left(p\right)$.

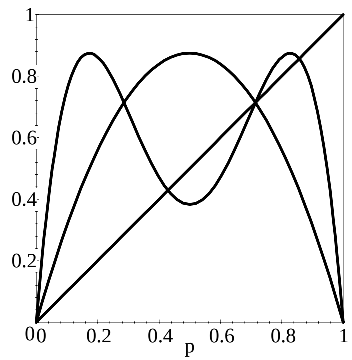

Figure 1.7:

Un point d'équilibre instable pour $f\left(p\right)$ et $f^{(\circ 2)}\left(p\right)$.

Deux points d'équilibre stables pour $f^{(\circ 2)}\left(p\right)$ [cycle d'ordre 2]