1. Modèle à générations imbriquées

1.1. Le comportement du consommateur

- Pour un consommateur qui travaille deux périodes, le programme de maximisation de l'utilité s'écrit:

$$\max_{c_1,c_2}\{u(c_1,c_2)\} \qquad \begin{aligned} s.c.\quad p_1c_1 &\leq w_1 - s_1 \\ s.c.\quad p_2c_2 &\leq w_2 + s_1(1+r) \end{aligned}$$

ou encore:

$$\max_{c_1,c_2}\{u(c_1,c_2)\} \qquad s.c.\quad p_1c_1 + p_2\frac{c_2}{1+r} \leq w_1 + \frac{w_2}{1+r} = R$$

On établit facilement que la trajectoire des consommations s'écrit:

$$\left|\frac{\partial u(c_1,c_2)}{\partial c_2} / \frac{\partial u(c_1,c_2)}{\partial c_1}\right| = \frac{p_2}{p_1}\frac{1}{1+r}$$

NB: on distinguera donc bien le taux d'escompte psychologique du taux d'intérêt.

Si on parle d'une entreprise, il est naturel d'écrire $u(\pi_1,\pi_2) = \pi_1 + \pi_2/(1+r)$. Dans le cas d'un individu avec $u(c_1,c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2$ (forme fonctionnelle propre à l'individu, les choix de consommation sont défini par $\beta\, c_1/c_2 = (p_2/p_1)[1/(1+r)]$. L'égalité $\beta = 1/(1+r)$ ne se trouvera vérifiée que dans un modèle d'équilibre général (où r est un variable et plus précisément un prix) où, par exemple, le niveau des prix et de la consommation sont stationnaires.

1.2. Le modèle à générations imbriquées

- A chaque période, n_t individus naissent. Ils vivent pendant deux périodes: la première où ils travaillent, la seconde pendant laquelle ils vivent de leur épargne. Le programme du consommateur h s'écrit:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t}}\{u_h(c_{1,t},c_{2,t})\} \qquad s.c.\quad p_tc_{1,t} + p_{t+1}\frac{c_{2,t}}{1+r_t} \leq w_{1,t} + \frac{w_{2,t}}{1+r_t}$$

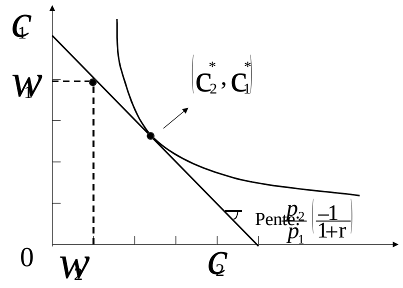


Figure 1.1:

- Le secteur productif de l'économie est représenté par une entreprise à la fonction de production $y_t = F(k_t, l_t)$ où k_t et l_t sont respectivement le capital et le travail à la date t. Par définition, on a $l_t = n_t$. Le capital est lui déterminé par le niveau d'épargne s_t et donc par les choix de consommation de la génération précédente $c_{1,t-1}$. L'hypothèse de concurrence parfaite (par exemple) permet de définir le niveau production.

- Sur le marché des biens on a l'équation suivante (consommation = production):

$$n_tc_{1,t} + n_{t-1}c_{2,t-1} \leq y_t$$

- Le marché financier apporte des équations supplémentaires. Par exemple, s'il n'y a pas de placements possibles et avec une quantitié de monnaie est constante, on connait le niveau de l'épargne:

$$n_{t-1}(w_{1,t-1} - p_{t-1}c_{1,t-1}) = M$$

- Toute l'épargne accumulée en première période est utilisée (pas d'héritage) donc:

$$p_tc_{2,t-1} = (1+r_t)(w_{1,t-1} - p_{t-1}c_{1,t-1})$$

1.3. Un cas simple

- Population constante $n_t = 1$. Production constante: $y_t = y = 1$. Salaires: $w_{1,t} = p_ty_t = p_ty$. Pas de placements possible de l'épargne. Quantité totale de monnaie constante $M = 1$.

- Fonction d'utilité: $u(c_1,c_2) = \ln(c_1^2 + \beta c_2^2)$. Choix du consommateur:

$$\beta\frac{c_{2,t}}{c_{1,t}} = \frac{p_{t+1}}{p_t}$$

- Dans le modèle à génération imbriquées:

$$\begin{aligned} c_{1,t} + c_{2,t-1} &= y \\ w_{1,t} - p_tc_{1,t} &= 1 \\ w_{1,t} - p_tc_{1,t} &= p_{t+1}c_{2,t} \end{aligned}$$

- Toutes les variables peuvent s'écrire comme une fonction des prix:

$$\begin{aligned} c_{1,t} &= y - \frac{1}{p_t} \\ c_{2,t} &= \frac{1}{p_{t+1}} \end{aligned}$$

- l'évolution des prix s'écrit:

$$p_{t+1} = \beta \frac{p_t}{\sqrt{p_t y - 1}}$$

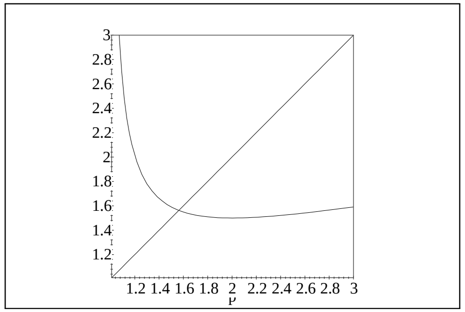


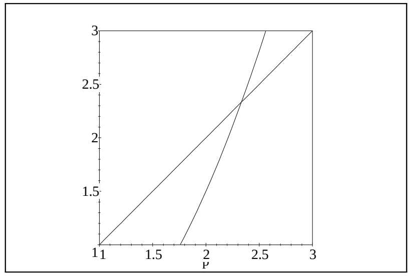
Figure 1.2: $p_{t+1} = \frac{3}{4} \frac{p_t}{\sqrt{p_t - 1}}$

- Trajectoires cycliques, en général convergentes.

1.4. Un autre cas simple

- Population constante $n_t = 1$. Production constante: $y_t = y = 1$. Salaires: $w_{1,t} = p_t y_t = p_t y$. Pas de placements possible de l'épargne. Quantité totale de monnaie constante $M = 1$.
- Fonction d'utilité: $u(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} + \beta \sqrt{c_2}$.
- l'évolution des prix s'écrit:

$$p_{t+1} = \beta^2 p_t (p_t y - 1)$$



$p_{t+1} = \frac{3}{4} p_t (p_t - 1)$

- Trajectoires divergentes.