

1. Introduction à la finance

- Consommateur représentatif:

$$\max \left\{ E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \right] \right\} \quad 0 < \beta < 1, \\ s.c. \quad A_{t+1} = R_t (A_t + y_t - c_t)$$

où c_t est la consommation, y_t les revenus du travail, A_t la valeur des actifs à la date t (positif ou négatif). Le rendement des actifs est R_t .

1.1. Modèle de Hall

- Variable de contrôle: c_t ; Variables d'état: A_t , y_t et R_{t-1} ; $\Rightarrow$ Equation de Bellman:

$$v(A_0, y_0, R_{-1}) = \max_{c_0} \left\{ u(c_0) + \beta E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_{t+1}) \right] \right\} \quad s.c. \quad A_{t+1} = R_t (A_t + y_t - c_t) \dots \\ = \max_{c_0} \{ u(c_0) + \beta v(A_1, y_1, R_0) \} \quad s.c. \quad A_1 = R_0 (A_0 + y_0 - c_0)$$

- Condition du 1^{er} ordre:

$$u'(c_0) - \beta E_0 \left[R_0 \frac{\partial v(A_1, y_1, R_0)}{\partial A_1} \right] = 0$$

- Formule de Benveniste-Scheinkman:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial A_0}(A_0, y_0, R_{-1}) &= u'(c_0) \frac{\partial c_0}{\partial A_0} + \beta \left(\frac{\partial A_1}{\partial A_0} \frac{\partial v(A_1, y_1, R_0)}{\partial A_1} \right) \\ &= u'(c_0) \left(\frac{\partial c_0}{\partial A_0} \right) + \beta E_0 \left[R_0 \left(1 - \frac{\partial c_0}{\partial A_0} \right) \frac{\partial v(A_1, y_1, R_0)}{\partial A_1} \right] \\ &= \beta E_0 \left[R_0 \frac{\partial v(A_1, y_1, R_0)}{\partial A_1} \right] \\ &= u'(c_0) \end{aligned}$$

- Equation d'Euler:

$$u'(c_0) - \beta E_0 [R_0 u'(c_1)] = 0$$

- Processus de Markov d'ordre 1 - Causalité au sens de Granger: pas d'autre information nécessaire pour prévoir l'évolution de la consommation (rôle de y_t)

$$E_t u'(c_{t+1}) = \frac{u'(c_t)}{\beta E_t [R_t]}$$

1.2. Evaluation du cours des actions

- A chaque période: p_t cours de l'action, d_t dividende, s_t nombre de part
Donc:

$$A_t = s_t (p_t + d_t) \quad R_t = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$$

- Equation d'Euler:

$$1 = \beta E_t \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} \times \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right)$$

- Hypothèses sur l'utilité marginale de la consommation et sur la corrélation avec les variables financières:

$$\begin{aligned} E_t \left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right) &= Cste \\ cov_t \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}, \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

- En particulier si $u(c_t)$ est linéaire, on obtient:

$$1 = \beta E_t \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} \right) E_t \left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right) + \beta cov_t \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}, \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right) = \frac{\beta}{p_t} E_t (p_{t+1} + d_{t+1})$$

- Le cours de l'action à la date t prennent en compte les dividendes distribués à la même date et ne dépendent que du cours à la période précédente (pas des fluctuations de la consommation). Les solutions de l'équation précédente s'écrivent:

$$p_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j E_t d_{t+j} + \gamma_t \left(\frac{1}{\beta} \right)^t$$

où γ_t est un processus aléatoire qui vérifie $E_t \gamma_{t+1} = \gamma_t$. (C'est ce qu'on appelle une martingale).

1.3. Modèle de Lucas (1978)

1.3.1. Prix comme fonction des dividendes espérés

- Pas de revenus autres que ceux des actifs $y_t \equiv 0$ - “actifs” : un arbre dont la production (non stockable) à chaque période est d_t - prix de l’arbre: p_t - consommation à chaque période: $c_t = d_t$.

- Equation d’Euler:

$$p_t = E_t \left(\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} (p_{t+1} + d_{t+1}) \right)$$

- Par itération:

$$\begin{aligned} p_t &= \beta E_t \left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} (p_{t+1} + d_{t+1}) \right) \\ &= E_t \left(\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} d_{t+1} + \beta^2 E_{t+1} \left(\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} \frac{u'(d_{t+2})}{u'(d_{t+1})} (p_{t+2} + d_{t+2}) \right) \right) \\ &= E_t \left(\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} d_{t+1} + \beta^2 E_{t+1} \left(\frac{u'(d_{t+2})}{u'(d_t)} (p_{t+2} + d_{t+2}) \right) \right) = \dots = E_t \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j \frac{u'(d_{t+j})}{u'(d_{t+s})} d_{t+j} \end{aligned}$$

- Soit $p_t = h(x_t)$ la règle de tarification où la variable $x_t = d_t$ est la variable d’état. En utilisant le fait que $c_t = (p_t + d_t) s_t - p_t s_{t+1}$ le nombre de parts optimal est défini par:

$$v(s[h(x) + x]) = \max_{s'} \{u([h(x) + x]s - h(x)s') + \beta \int v([h(x') + x']s') dF(x', x)\}.$$

- Condition du premier ordre:

$$h(x) u'[c(x)] = \beta \int [h(x') + x'] v'(s'[h(x') + x']) dF(x', x)$$

- Formule de Benveniste et Scheinkman:

$$v'(s[h(x) + x]) = u'[c(x)]$$

- On pose $w(x) = h(x) u'[c(x)]$. La condition du premier ordre peut s’écrire:

$$w(x) = \beta \int w(x') dF(x', x) + \beta \int x' u'[c(x')] dF(x', x)$$

1.3.2. Consommation optimale et règle de tarification

- Marché compétitif des arbres + Loi statistique sur l’évolution de la production

$$\text{prob} \{d_{t+1} \leq x' \mid d_t = x\} = F(x, x')$$

- Si s_t est le nombre d’arbres (ou de parts) détenus par le consommateur on a le problème suivant (agent représentatif car même préférences et même dotations initiales $\rightarrow$ pas d’échange):

$$\begin{aligned} \max \left\{ E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \right] \right\} \quad & 0 < \beta < 1, \\ \text{s.c.} \quad & c_t + p_t s_{t+1} = (p_t + d_t) s_t \end{aligned}$$

- Variables d’état: s_t, p_t, d_t - Variable de contrôle: s_{t+1} . Equation de Bellman:

$$v(s_t, p_t, d_t) = \max_{s_{t+1}} \{u(c_t) + \beta \int v(s_{t+1}, p_{t+1}, d_{t+1}) dF(d_{t+1}, d_t)\} \quad \text{s.c.} \quad c_t + \dots$$

- A l’équilibre $s = s' = 1$ donc $c(x) = x$ et l’équation fonctionnelle à résoudre devient:

$$w(x) = \beta \int w(x') dF(x', x) + g(x)$$

où $g(x) = \beta \int x' u'(x') dF(x', x)$ est une fonction connue.

- Si $u(c)$ est une fonction concave et bornée par A qui vérifie $u(0) = 0$, alors $A \geq u(c) \geq u(0) + cu'(c)$ donc $g(x) \leq \beta B$. Par suite

$$T(w) : w \mapsto \beta \int w(x') dF(x', x) + g(x)$$

est un opérateur contractant qui converge vers une solution unique.

- On obtient la règle de tarification par:

$$h(x) = w(x) / u'(x)$$

1.4. Généralisation de l'approche:

- **1ère étape:**

Calcul de la consommation d'équilibre (= consommation optimale dans le cas un agent représentatif) dans un modèle intertemporel. Ici $c_t = s_t d_t$

- **2ème étape:**

Calcul du prix des actifs, en particulier l'équation d'Euler qui décrit leur évolution comme une fonction de l'état de l'économie. Ici *(première) équation de Bellman pour trouver $h(x)$*

- **3ème étape:**

Injecter dans l'équation d'Euler la consommation d'équilibre calculée en première étape. Ici *“à l'équilibre $s = s'...$ ”*