1.5. Exemple 1: Taux d'intérêts à court terme et à long terme

- Modèle identique à celui de Lucas:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \qquad s.c. \quad c_t \leq d_t$$

Consommation à chaque période $c_t = d_t$. (étape 1)

- Deux actifs financiers: placement sur un an et placement sur deux ans. Taux d'intérêts respectifs: R_{1t}, R_{2t}.

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \qquad s.c. \quad c_t + L_{1t} + L_{2t} \leq d_t + R_{1t-1}L_{1t-1} + R_{2t-2}L_{2t-2}$$

Résolution avec le Lagrangien:

$$J = \max E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(d_t + R_{1t-1}L_{1t-1} + R_{2t-2}L_{2t-2} - c_t - L_{1t} - L_{2t} \right) \right] \right\}$$

Conditions du premier ordre:

$$u'(c_t) - \lambda_t = 0 \qquad -\lambda_t + \beta E_t[\lambda_{t+1}R_{1t}] = 0 \qquad -\lambda_t + \beta E_t[\lambda_{t+2}R_{2t}] = 0$$

- Les deux équations d'Euler s'écrivent (étape 2):

$$E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} R_{1t}\right] = 1$$
$$E_t\left[\beta^2 \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)} R_{2t}\right] = 1$$

- On remplace c_t par d_t (étape 3) où les dividendes obéissent à un processus stochastique:

$$d_{t+1} = \rho d_t \theta_{t+1}, \quad \rho > 0$$

où θ_{t+1} est un processus $i.i.d.$ toujours positif. Dans le cas où $u(c) = \ln c$ on trouve:

$$R_{1t}^{-1} = \frac{\beta}{\rho} E\left(\frac{1}{\theta}\right)$$
$$R_{2t}^{-1} = \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^2 \left[E\left(\frac{1}{\theta}\right)\right]^2$$

- Dans le cas général on a:

$$\begin{aligned} R_{2t}^{-1} &= E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\, \beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})}\right] \\ &= E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\, E_{t+1}\left[\beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})}\right]\right] \\ &= E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\, R_{1t+1}^{-1}\right] \\ &= R_{1t}^{-1}.E_t\left[R_{1t+1}^{-1}\right] + cov_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, R_{1t+1}^{-1}\right] \end{aligned}$$

Si on écrit

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} R_{1t} = 1 + \xi_{1t+1} \qquad où \quad E_t[\xi_{1t+1}] = 0$$

on a :

$$R_{2t}^{-1} = R_{1t}^{-1}\left[E_t\left[R_{1t+1}^{-1}\right] + cov_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, \xi_{1t+1}\right]\right]$$

1.6. Exemple 2: Modèle de Lucas avec plusieurs actifs

- Il y a n espèces d'arbres qui produisent à chaque période d_{it}. Chaque agent possède la quantité s_{it} de l'espèce i. A chaque période, la maximisation du bien-être implique que $c_t = d_t = \Sigma_{i=1}^n d_{it}$. (étape 1)
Le programme décrivant le fonctionnement des marchés financiers s'écrit donc:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t) \qquad s.c. \quad \sum_{i=1}^{n} p_{it}s_{it+1} = \sum_{i=1}^{n} (p_{it} + d_{it})\, s_{it+1} - c_t$$

- L'équation d'Euler du cours de l'action i (étape 2) s'écrit:

$$p_{it} = \beta E_t\left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (p_{it+1} + d_{it+1})\right]$$

- En substituant la consommation d'équilibre (étape 3) on trouve:

$$p_{it} = \beta E_t\left[\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} (p_{it+1} + d_{it+1})\right]$$

- Cas particulier: $u(c) = \ln c$:

$$p_{it} = \beta E_t \left[\frac{d_t}{d_{t+1}} (p_{it+1} + d_{it+1}) \right]$$

- On suppose que les fonctions de tarification s'écrivent sous la forme:

$$p_{it} = \Phi_{it} d_t, \qquad i = 1, ..., n$$

NB: Lucas (1978) et Brock (1982) on montré que pour ce type de problème, la solution est unique.

- Par suite on a:

$$\Phi_{it} d_t = \beta E_t [\Phi_{it+1}] d_t + \beta E_t \left[\frac{d_{it+1}}{d_{t+1}} \right] d_t$$

On simplifie par d_t et on itère pour trouver:

$$\Phi_{it} = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j E_t \left[\frac{d_{it+j}}{d_{t+j}} \right]$$

- Dans le cas où $n = 1$, on retrouve la formule:

$$p_t = \frac{\beta d_t}{1 - \beta}$$

- Dans le cas où $n = 2$ et où l'on suppose que l'évolution des actifs peut s'écrire:

$$\begin{aligned} d_{1t} &= \frac{1 - \epsilon_t}{2} d_t \\ d_{2t} &= \frac{1 + \epsilon_t}{2} d_t \end{aligned}$$

avec ϵ_t variable aléatoire à valeurs dans $[0, 1]$ et obéissant à un processus de Markov tel que $E_t \epsilon_{t+j} = \rho^j$, $\quad |\rho| < 1$, on trouve:

$$\begin{aligned} \Phi_{1t} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j E_t \left[\frac{1 - \epsilon_{t+j}}{2} \right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^j \left(\frac{1 - \rho^j \epsilon_t}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} - \frac{\beta\rho}{1 - \beta\rho} \epsilon_t \right) \\ \Phi_{2t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} + \frac{\beta\rho}{1 - \beta\rho} \epsilon_t \right) \end{aligned}$$

NB: on obtient ce même résultat en écrivant directement l'équation de Bellman avec d_t et ϵ_t comme variables d'état.

1.7. Options, produits dérivés et autres produits contingents.

- L'état de l'économie x évolue suivant un processus de Markov défini par:

$$prod \{x_{t+1} \leq x' \quad | \quad x_t = x\} = \int_{-\infty}^{x'} f(u, x) \, du \equiv F(x', x)$$

- Si l'économie est dans l'état x_t à la période t, un agent économique peut acheter ou vendre le droit d'acheter, si $x_{t+1} \in A$, une unité de bien à la période $t + 1$ à un prix qui s'écrit:

$$\int_{x_{t+1} \in A} q(x_{t+1}, x_t) \, dx_t$$

- Dans le cas particulier où $A = \Omega \equiv$ ensemble des possibles pour x, on a:

$$\int_{x_{t+1} \in \Omega} q(x_{t+1}, x_t) \, dx_t = \frac{1}{R_t}$$

- Supposons maintenant qu'il y a un marché compétitif pour ces options. Le programme du consommateur représentatif s'écrit: