1. Modèles de recherche

1.1. Espérance d'une variable aléatoire positive

- Fonction de répartition: $F(p)$.
- Moyenne:

$$Ep = \int_0^{+\infty} p dF(p) = \int_0^{+\infty} [1 - F(p)] dp$$

- Minimum sur deux tirages indépendants:

$$\{\inf(p_1, p_2) > p\} \Leftrightarrow \{(p_1 > p) \cap (p_2 > p)\}$$

donc:

$$E \inf(p_1, p_2) = \int_0^{+\infty} [1 - F(p)]^2 dp$$

- Minimum sur N tirages indépendants:

$$E \inf(p_1, p_2, ..., p_N) = \int_0^{+\infty} [1 - F(p)]^n dp$$

1.2. Temps de recherche optimal

(Stigler - 1961)

$$\min_n \left\{ nc + \int_0^{+\infty} [1 - F(p)]^n dp \right\} = \min_n \{nc + G_n\}$$

- Gain marginal d'un essai supplémentaire: $H_n = G_{n-1} - G_n$ positif et décroissant
- Objectif différent de la recherche du plus bas prix.

1.3. Recherche séquentielles du plus bas prix

1.3.1. Recherche sans retour en arrière possible

Pour chaque offre s, l'agent a le choix entre deux alternatives:

- Accepter l'offre ce qui termine sa recherche.
- Refuser l'offre, et reprendre la recherche ce qui lui coute c.

Equation de Bellman:

$$v(s) = \inf \left\{ s, c + \int v(s') dF(s') \right\} = \inf \{s, \bar{s}\}$$

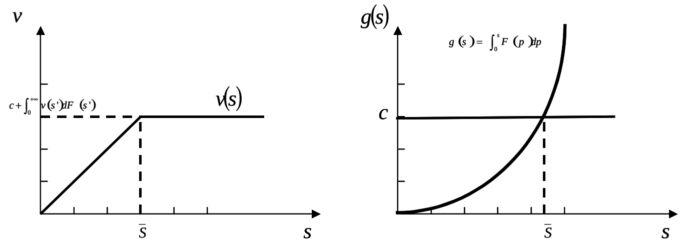

Figure 1.1:

En décomposant l'intégrale on trouve:

$$\begin{aligned} c &= \bar{s} - \left(\int_0^{\bar{s}} v(s) dF(s) + \int_{\bar{s}}^{+\infty} v(s) dF(s) \right) = \bar{s} - \left(\int_0^{\bar{s}} s dF(s) + \int_{\bar{s}}^{+\infty} \bar{s} dF(s') \right) \\ &= \int_0^{\bar{s}} (\bar{s} - s) dF(s) = \int_0^{\bar{s}} F(s) ds = g(\bar{s}) \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer le prix de réserve.

NB: $g(0) = 0$, $g'(s) = F(s) > 0$ et $g''(s) = F'(s) > 0$ si $s > 0$.

1.3.2. Recherche avec retour en arrière possible

Pour chaque offre, l'agent a le choix entre deux alternatives:

- Accepter la meilleure offre qui lui a été faite jusqu'à maintenant, s ce qui termine sa recherche.
- Continuer sa recherche ce qui lui coute c.

Equation de Bellman:

$$J(s) = \inf \left\{ s, c + J(s) \int_s^{+\infty} dF(s') + \int_0^s J(s') dF(s') \right\} = \inf \{s, \bar{s}\}$$

En utilisant l'unicité de la solution de cette équation et par analogie avec le cas précédent on peut montrer que:

$$J(s) = \inf \{s, \bar{s}\} \qquad \text{où } \int_0^{\bar{s}} F(s) ds = c.$$

Démonstration de l'unicité: montrer que l'opérateur

$$T(z) = \inf \left\{ s, c + \int_0^{+\infty} z(s') dF(s') \right\}$$

est contractant sur l'espace des fonctions continues et bornées $C[0, s^+]$.

1.3.3. Risque et prix de réserve

- Distributions ayant la même moyenne:

$$\int_0^{+\infty} \left[F(s, r_2) - F(s, r_1)\right] ds = 0$$

- Croisement des courbes de distribution cumulée en un point unique:

$$\exists\, \hat{s} \quad | \quad \begin{array}{ll} F(s, r_2) - F(s, r_1) \geq 0 & \forall\, s \leq \hat{s} \\ F(s, r_2) - F(s, r_1) \leq 0 & \forall\, s \geq \hat{s}. \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Conséquence:

$$\int_0^{y} \left[F(s, r_2) - F(s, r_1)\right] ds \geq 0 \qquad \forall\, y \geq 0.$$

NB: en version discrète:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial F(s, r)}{\partial r} ds = 0 \quad et \quad \int_0^{y} \frac{\partial F(s, r)}{\partial r} ds \geq 0$$

Conclusion: plus la distribution est étalée, plus le prix de réserve est bas:

$$c = \int_0^{\overline{s}(r)} F(s, r)\, ds$$