1. Le modèle de "matching" de Jovanovich

- **Limites du modèle de recherche:** si tous les chômeurs sont dans des situations identiques, ils vont tous choisir d'accepter un emploi si le salaire est au moins de $\bar{w}$. Par suite, aucune entreprise n'a intérêt à offrir un salaire supérieur à $\bar{w}$ et la distribution $F(w)$ est concentrée en ce point.
- **Idée générale:** tous les acteurs sont rationnels et cherchent à obtenir un "match" dans leur intérêt, mais ils ne connaissent pas par avance le bénéfice qu'ils pourront en tirer. Celui-ci est "découvert" progressivement.
- **Motivations:**
  (1) En général, le salaire augmente avec l'expérience.
  (2) Les changements d'emploi sont corrélés négativement avec l'expérience.
  (3) Les changements d'emploi sont corrélés négativement avec le montant du salaire.
- **Le modèle:**
  (1) A chaque période un travailleur et une entreprise sont associés et forment une combinaison de valeur θ où $F(X) = prob\{\theta \leq X\}$ est une distribution connue. L'entreprise et le travailleur observent $(\theta + \zeta)$ où ζ est un "bruit" non corrélé avec θ.
  (2) L'entreprise propose un salaire pour la première période basé sur $(\theta + \zeta)$. En deuxième période, il s'ajuste pour tenir compte de la vraie valeur θ et reste ensuite à ce niveau pour toujours
  (3) Le travailleur choisit d'accepter ou non l'offre faite par l'entreprise. En deuxième période, (après la découverte de la vrai valeur de θ), il peut décider de quitter son emploi et de reprendre sa recherche.

- **Cas particulier:**
  (dans toute la suite du modèle, on suppose que les distributions de probabilité sont de la forme suivante)

$$\theta \sim N\left(\mu, \sigma_0^2\right), \qquad \zeta \sim N(0,1)$$

- Le travailleur et l'entreprise calculent la distribution de θ connaissant $x = \theta + \zeta$ (Statistique Baysienne): c'est une loi normale de moyenne m_1 et de variance σ_1^2 avec

$$m_1 = E[\theta \mid x = \theta + \zeta] = \mu + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 1}(x - \mu)$$
$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 1}$$

NB: inférence baysienne: "Prob *a posteriori*" # "Prob *a priori*" × vraisemblance:

$$p(\theta / X_1) = \frac{p(\theta, X_1)}{p(X_1)} = \frac{1}{p(X_1)} p(\theta)\ p(X_1/\theta)$$

- **Résolution de l'étape (3):**
  Soit $J(\theta)$ la valeur actualisée d'un match de valeur θ connue par le travailleur (en deuxième période) et Q l'espérance de la valeur actualisée pour un travailleur sans emploi à la période précédente. L'équation de Bellman s'écrit:

$$J(\theta) = \sup\{\theta + \beta J(\theta), \beta Q\}$$

sa solution s'écrit:

$$J(\theta) = \theta + \beta J(\theta) = \frac{\theta}{1-\beta} \qquad si \quad \theta \geq \bar{\theta}$$
$$J(\theta) = \beta Q \qquad si \quad \theta \leq \bar{\theta}$$

avec $\bar{\theta} = (1-\beta)\beta Q$

- **Résolution de l'étape (2):**
  Soit $V(m_1)$ la valeur actualisée d'un match pour lequel il reçoit une offre de salaire m_1 pour la première période. Le travailleur a le choix entre (a) l'accepter, recevoir m_1 cette période et θ'/m_1 aux périodes qui suivront, ou (b) refuser de l'offre. Donc:

$$V(m_1) = \sup\left\{m_1 + \beta \int J(\theta')\, dF\left(\theta' \mid m_1, \sigma_1^2\right), \beta Q\right\}$$

- Equation de Bellman:

$$V(m_1) = \sup\left\{m_1 + \beta \int J(\theta')\, dF\left(\theta' \mid m_1, \sigma_1^2\right), \beta Q\right\}$$

- La solution s'écrit sous la forme:

$$V(m_1) = m_1 + \beta \int J(\theta')\, dF\left(\theta' \mid m_1, \sigma_1^2\right) \qquad si \quad m_1 \geq \bar{m}_1$$
$$V(m_1) = \beta Q \qquad si \quad m_1 \leq \bar{m}_1$$

- L'offre faite par l'entreprise est supérieure au salaire de réserve du travailleur:

$$V(\bar{m}_1) = \bar{m}_1 + \beta \int J(\theta')\, dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right) = \beta Q = \frac{\bar{\theta}}{1-\beta}$$

donc

$$\bar{m}_1 + \beta \frac{\bar{\theta}}{1-\beta} \int_0^{\bar{\theta}} dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right) + \beta \int_{\bar{\theta}}^{+\infty} \frac{\theta'}{1-\beta} dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right)$$
$$= \frac{\bar{\theta}}{1-\beta} \int_0^{\bar{\theta}} dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right) + \frac{\bar{\theta}}{1-\beta} \int_{\bar{\theta}}^{+\infty} dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right)$$

- On obtient finalement:

$$\bar{\theta}\int_0^{\bar{\theta}} dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right) - \bar{m}_1 = \frac{1}{1-\beta}\int_{\bar{\theta}}^{+\infty}\left(\beta\theta' - \bar{\theta}\right) dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right)$$

En utilisant

$$\bar{\theta} = -\frac{\beta}{1-\beta}\int_0^{\bar{\theta}} \bar{\theta} dF - \frac{\beta}{1-\beta}\int_0^{+\infty} \bar{\theta} dF + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{\bar{\theta}} \bar{\theta} dF + \frac{1}{1-\beta}\int_0^{+\infty} \bar{\theta} dF$$

on trouve:

$$\bar{\theta} - \bar{m}_1 = \frac{\beta}{1-\beta}\int_{\bar{\theta}}^{+\infty}\left(\theta' - \bar{\theta}\right) dF\left(\theta' \mid \bar{m}_1, \sigma_1^2\right)$$

- **Résolution de l'étape (1):**

Soit G la distribution cumulée de m_1. Par définition:

$$Q = \int V\left(m_1\right) dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)$$

Par suite $V\left(m_1\right)$ vérifie l'équation:

$$V\left(m_1\right) = \sup\left\{\begin{array}{l} m_1 + \beta \int \sup\left[\frac{\theta}{1-\beta}, \beta \int V\left(m_1'\right) dG\left(m_1' \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)\right] dF\left(\theta \mid m_1, \sigma_1^2\right), \\ \beta \int V\left(m_1'\right) dG\left(m_1' \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right) \end{array}\right\}$$

On montre qu'il est monotone et contractant et qu'il a donc une unique solution.

1.1. Analyse des résultats:

- Probabilité pour un chômeur d'accepter une offre:

$$prob\left\{m_1 \geq \bar{m}_1\right\} = \int_{\bar{m}_1}^{+\infty} dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)$$

- Probabilité de démission après une période:

$$prob\left\{\left(\theta \leq \bar{\theta}\right) \cap \left(m_1 \geq \bar{m}_1\right)\right\} = \int_{\bar{m}_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\bar{\theta}} dF\left(\theta \mid m_1, \sigma_1^2\right) dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)$$

- Probabilité d'acceptation définitive d'une offre:

$$prob\left\{\left(\theta \geq \bar{\theta}\right) \cap \left(m_1 \geq \bar{m}_1\right)\right\} = \int_{\bar{m}_1}^{+\infty}\int_{\bar{\theta}}^{\infty} dF\left(\theta \mid m_1, \sigma_1^2\right) dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)$$

- Salaire moyen en première période:

$$\bar{w}_1 = \frac{\int_{\bar{m}_1}^{+\infty} m_1 dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)}{\int_{\bar{m}_1}^{+\infty} dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)}$$

Salaire moyen en deuxième période:

$$\bar{w}_2 = \frac{\int_{\bar{m}_1}^{+\infty}\int_{\bar{\theta}}^{\infty} \theta\, dF\left(\theta \mid m_1, \sigma_1^2\right) dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)}{\int_{\bar{m}_1}^{+\infty}\int_{\bar{\theta}}^{\infty} dF\left(\theta \mid m_1, \sigma_1^2\right) dG\left(m_1 \mid \mu, \frac{\sigma_0^4}{\sigma_0^2+1}\right)}$$

On peut montrer que $\bar{w}_2 \geq \bar{w}_1$

- Généralisation: Il n'y a jamais observation parfaite de θ. A chaque période, les acteurs observent $x_i = \theta + \zeta_i$ donc les entreprises font une offre $m_j = E\left[\theta \mid \theta + \zeta_1, ..., \theta + \zeta_j\right]$. Par inférence Baysienne, on a:

$$\begin{aligned} m_j &= \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+1} m_{j-1} + \frac{1}{h_{j-1}+1}\theta + \zeta_j \\ h_j &= h_{j-1} + 1 \end{aligned}$$

avec $h_j = 1/\sigma_j^2$ et les salaires de réserve augmentent avec l'expérience, en concordance avec les faits réels observés.