# 1. Programmation dynamique

## 1.1. Problème intertemporel général

Variables d'état: $x_1, x_2, ..., x_t, ..., x_T \in \Re^{n\times T}$, (vecteurs de dim $n$ pris aux dates $1, 2, ..., T$).
Variables de controle: $u_1, u_2, ..., u_t, ..., u_T \in \Re^{k\times T}$, (vecteurs de dim $k$ pris aux dates $1, 2, ..., T$).

$$\begin{aligned} \max_{x_1,...,x_T,u_1,...,u_T} & R(x_0, u_0, x_1, u_1, ..., x_T, u_T, x_{T+1}) \\ s.c. \quad & G(x_0, u_0, x_1, u_1, ..., x_T, u_T, x_{T+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

$n(T+1)$ équations qui donnent $u_i = H_i(x_0)$ et $x_i = w_i(x_0)$.

## 1.2. Problème récursif

$$\begin{aligned} \max_{x_1,...,x_T,u_1,...,u_T} R(x_0, x_i, u_i)_{i=1...T} &= r_0(x_0, u_0) + r_1(x_1, u_1) + ... + r_T(x_T, u_T) + W_0(x_{T+1}) \\ s.c. \quad x_1 &\leq g_0(x_0, u_0) \quad x_2 \leq g_1(x_1, u_1) \quad ... \quad x_{T+1} \leq g_T(x_T, u_T) \end{aligned}$$

$x_t \leq g_t(x_t, u_t)$: "fonctions de transition".



## 1.3. Equations de Bellman

### 1.3.1. Problème à une période

$$\begin{aligned} W_1(x_T) &= \max_{u_T} \{r_T(x_T, u_T) + W_0(x_{T+1})\} \\ s.c. \quad x_{T+1} &= g_T(x_T, u_T) \end{aligned}$$

La condition (nécessaire) du premier ordre s'écrit:

$$\frac{\partial r_T}{\partial u_T} + \frac{\partial g_T}{\partial u_T} W_0'(x_{T+1}) = 0$$

Supposons cette condition suffisante. La solution s'écrit sous la forme

$$u_T = h(x_T).$$

Si $h(x_T)$ est dérivable, la dérivée de $W_1(x_T)$ existe et s'écrit:

$$\begin{aligned} W_1'(x_T) &= \frac{\partial r_T}{\partial x_T} + h'(x_T)\frac{\partial r_T}{\partial u_T} + \left(\frac{\partial g_T}{\partial x_T} + h'(x_T)\frac{\partial g_T}{\partial u_T}\right) W_0'(x_{T+1}) \\ &= \frac{\partial r_T}{\partial x_T} + \frac{\partial g_T}{\partial x_T} W_0'(x_{T+1}) \end{aligned}$$



### 1.3.2. Problème à $(T+1)$ périodes

$$\begin{aligned} W_{T+1}(x_0) &= \max_{u_0,u_1,...,u_T} \{r_0(x_0, u_0) + r_1(x_1, u_1) + ... + r_T(x_T, u_T) + W_0(x_{T+1})\} \\ s.c. \quad x_{t+1} &= g_t(x_t, u_t) \quad \textit{pour } t = 0, ...T \textit{ et où } x_0 \textit{ est donné.} \end{aligned}$$

NB: $u_t$ a un impact sur $x_{s\geq t}$ seulement.

$$W_{T+1}(x_0) = \max_{u_0}\left\{r_0(x_0, u_0) + \max_{u_1}\left\{r_1(x_1, u_1) + ... + \max_{u_T}\{r_T(x_T, u_T) + W_0(x_{T+1})\}\right\}\right\}$$

$T+1$:problèmes à une dimension:

$$\begin{aligned} W_{T-j}(x_{T-j}) &= \max_{u_{T-j}} \{r_{T-j}(x_{T-j}, u_{T-j}) + W_0(x_{T-j+1})\} \\ s.c. \quad x_{T-j+1} &= g_T(x_{T-j}, u_{T-j}), \ x_{T-j} \textit{ donné.} \end{aligned}$$

Solution sous la forme:

$$u_t = h_t(x_t).$$

Consistence temporelle: pas d'incitations à changer de politique.



### 1.3.3. Problème à politique constante en horizon infini

$$\begin{aligned} &\max_{\{u_t\}_{t=0}^{+\infty}} \left\{\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t r(x_t, u_t)\right\}, \qquad 0 < \beta < 1. \\ &s.c. \quad x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \textit{où } x_t \textit{ est donné.} \end{aligned}$$

Horizon infini:

$$\begin{aligned} V(x) &= \max_u \{r(x, u) + \beta V(\tilde{x})\} \\ s.c. \quad \tilde{x} &= g(x, u), \ x \textit{ donné.} \end{aligned}$$

Théorème: Sous les conditions de régularité (a) $r(.)$ est une fonction concave et bornée, et (b) $\{x_{t+1}, x_t, u_t \ | \ x_{t+1} \leq g(x_t, u_t)\}$ est convexe et compact, alors (1) l'équation fonctionnelle $V(x) = \max_u \{r(x, u) + \beta V(\tilde{x})\}$ a une unique solution strictement concave, (2) l'opérateur $V_{j+1}(x) = \max_u \{r(x, u) + \beta V_j(\tilde{x})\}$ converge vers la solution à partir de n'importe quelle valeur initiale bornée $V_0(x)$ , (3) la politique optimale est unique et invariante dans le temps (4) la solution est différentiable et sa dérivée s'écrit:

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x} + \beta \frac{\partial g}{\partial x} V'(g(x, h(x)))$$