

1. Croissance Optimale

(T.C. Koopmans - 1963; David Cass - 1965)

$$\max \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t), \quad 0 < \beta < 1$$
$$s.c. \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t), \quad k_0 > 0 \text{ donné}, \quad c_t \geq 0$$

où $u'(0) = +\infty$, $u' > 0$, $u'' < 0$, $f'(0) = +\infty$, $f'(\infty) = 0$, $f' > 0$ et $f'' < 0$.

$$v(k_t) = \max_{k_{t+1}} \{u(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta v(k_{t+1})\}$$

Condition du premier ordre:

$$-u'(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta v'(k_{t+1}) = 0$$

Equation de Benveniste et Scheinkman (différentiabilité):

$$v'(k_t) = u'(f(k_t) - k_{t+1}) f'(k_t) \quad \text{où } k_{t+1} = h(k_t)$$

(Brock et Mirman - 1972)

$$\max \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \ln(c_t), \quad 0 < \beta < 1$$
$$s.c. \quad c_t + k_{t+1} = A k_t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Calcul de $v_1(k) = \max_{c,k'} \{\ln c + \beta v_0(k')\}$:

$$v_1(k) = \ln A + \alpha \ln k.$$

Calcul de $v_2(k) = \max_{c,k'} \{\ln c + \beta v_1(k')\}$:

$$v_2(k) = v_2^0 + v_2^1 \ln k.$$

- (1) $u(\cdot)$ et $f(\cdot)$ strictement concaves donc $v(\cdot)$ strictement concave.
Par suite $k_{t+1} = h(k_t)$ est faiblement croissante.
- (2) Il existe un plafond $\bar{k}$ au niveau de capital, solution de $\bar{k} = f(\bar{k})$.
- (3) $k_{t+1} = h(k_t)$ est une suite monotone et bornée donc convergente.
- (4) la limite k_∞ ne dépend pas de l'état initial k_0 car à l'état stationnaire:

$$\beta f'(k_\infty) = 1.$$

NB: k_∞ ne dépend pas de $u(\cdot)$

Equation fonctionnelle de la dynamique:

$$-u'(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) f'(k_{t+1}) = 0$$

$$v(k) = E + F \ln k$$
$$\text{où } E = \frac{1}{1-\beta} \left\{ \ln[(1-\alpha\beta)A] + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta A) \right\}$$
$$F = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

A long terme:

$$k_\infty = (\alpha\beta A)^{-1}$$