1. Le Lagrangien

1.1. Optimisation statique:

- Problème d'optimisation:

$$\max_{x_i} u(x_1, ..., x_n)$$

sous les contrainte $g_1(p, x) = 0, ..., g_m(p, x)$, où $m < n$.

- Lagrangien du système:

$$L = u(p, x) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(p, x)$$

Théorème 1. *Soit x^* une solution du problème d'optimisation. On suppose que la matrice $m \times n$ des dérivées $\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)$ est de rang m. Alors, il existe des valeurs de $\lambda_1, ..., \lambda_k$ telles que:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial u(p, x^*)}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(p, x^*)}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= g_k(p, x) = 0 \end{aligned}$$

En d'autre terme x^* est solution des conditions du premier ordre données par la dérivation du Lagrangien (à $m + n$ variables)

NB: c'est donc une condition nécessaire et pas une condition suffisante.

Soit $V = u(p, x^*(p))$ la fonction d'utilité indirecte.

En différentiant la contrainte par rapport au paramètre p, on obtient:

$$\frac{dg_k(p, x^*)}{dp} = \frac{\partial g_k(p, x^*)}{\partial p} + \sum_i \frac{\partial g_k(p, x^*)}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{dp}$$

Par suite, on a la propriété fondamentale suivante:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dp} &= \frac{\partial u(p, x^*)}{\partial p} + \sum_i \frac{\partial u(p, x^*)}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{dp} \\ &= \frac{\partial u(p, x^*)}{\partial p} - \sum_i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(p, x^*)}{\partial x_i} \frac{dx_i^*}{dp} \\ &= \frac{\partial u(p, x^*)}{\partial p} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k(p, x^*)}{\partial p} \end{aligned}$$

1.2. Optimisation dynamique en temps discret:

- Problème d'optimisation:

$$\max_{x_t} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(x_t)$$

sous les contrainte $g_t(p, x_{t-1}, x_t) = 0$ où $t = 1...T$.

- Lagrangien du système:

$$L = u(x_0) + \sum_{t=1}^{T} \left[\beta^t u(x_t) + \lambda_t g_t(p, x_{t-1}, x_t)\right]$$

- Conditions du premier ordre:

$$\beta^t u'(x_t) + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial x_t}(p, x_{t-1}, x_t) + \lambda_{t+1} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial x_t}(p, x_t, x_{t+1}) = 0$$

pour $t = 1...T - 1$.

- Pour la dernière période on obtient:

$$\beta^T u'(x_T) + \lambda_T \frac{\partial g_T}{\partial x_T}(p, x_{T-1}, x_T) = 0$$

2. Le Hamiltonien: Optimisation en temps continu

- Problème de control optimal:

$$\max_{c(t)} V = \int_0^T v(s(t), c(t), t)\, dt$$

où $s(t)$ sont les variables d'état et $c(t)$ les variables de contrôle
sous la contrainte $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = f(s(t), c(t), t)$ avec $s(0) = s_0,\ s(T) = s_T$ (conditions aux bornes).

- NB: On supposera toujours par la suite qu'une solution existe, qu'elle est unique et différentiable par rapport au temps.

- Hamiltonien du système:

$$H(s(t), c(t), p(t), t) = v(s(t), c(t), t) + p(t) f(s(t), c(t), t)$$

Théorème 2. *Une solution du problème de contrôle optimal est un triplet $(s(t), c(t), p(t))$. Toute solution vérifie les équations suivantes:*

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = \frac{\partial v(s, c, t)}{\partial c} + p(t) \frac{\partial f(s, c, t)}{\partial c} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \dot{s} = {} & \frac{ds}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p(t)} = f(s(t), c(t), t) \\ \dot{p} = {} & \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial s(t)} = -\frac{\partial v(s, c, t)}{\partial s} - p(t) \frac{\partial f(s, c, t)}{\partial s} \end{aligned}$$

NB: Il s'agit ici aussi d'une condition nécessaire et pas d'une condition suffisante.

- Conditions de transversalité:

$$\lim_{t \to T} p(t) s(t) = 0$$