

1. Croissance Optimale - Lagrangien

(T.C. Koopmans - 1963; David Cass - 1965)

$$\max \sum_{t=0}^{+T} \beta^t u(c_t), \quad 0 < \beta < 1$$

$$s.c. \quad k_{t+1} = f(k_t) - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ donné}, \quad c_t \geq 0$$

où $u'(0) = +\infty$, $u' > 0$, $u'' < 0$, $f'(0) = +\infty$, $f'(\infty) = 0$, $f' > 0$ et $f'' < 0$.

• Lagrangien:

$$L(c_t, k_t, \lambda_t) = u(c_0) + \sum_{t=1}^{+T} \{ \beta^t u(c_t) + \lambda_t [f(k_{t-1}) - c_{t-1} - k_t] \}$$

$$+ \lambda_{T+1} [f(k_T) - c_T - k_{T+1}]$$

• Condition du premier ordre par rapport à c_t pour $t = 0 \dots T-1$

$$\lambda_{t+2} f'(k_{t+1}) = \lambda_{t+1}$$

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_{t+1}$$

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1}$$

ce qui donne:

$$f'(k_{t+1}) = \frac{\beta^t u'(c_t)}{\beta^{t+1} u'(c_{t+1})} = \frac{1}{\beta} \frac{u'[f(k_t) - k_{t+1}]}{u'[f(k_{t+1}) - k_{t+2}]}$$

• Dans le cas particulier proposé on a:

$$\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} = \frac{1}{\beta} \frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1}{\beta} \frac{A k_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}}{A k_t^{\alpha} - k_{t+1}}$$

d'où l'équation d'évolution:

$$k_{t+2} = A k_{t+1}^{\alpha} (1 + \alpha\beta) - \alpha\beta (A k_{t+1}^{\alpha-1}) (A k_t^{\alpha})$$

• L'état stationnaire est donné par:

$$\beta f'(k_{\infty}) = 1$$

$$k_{\infty} = (A\alpha\beta)^{1/(1-\alpha)}$$

• Conditions de transversalité: $k_{T+1} = 0 \Rightarrow$

$$A k_T^{\alpha} (1 + \alpha\beta) - \alpha\beta (A k_T^{\alpha-1}) (A k_{T-1}^{\alpha}) = 0$$

soit

$$k_T = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} (A k_{T-1}^{\alpha})$$

• La variable k_{T+1} peut-être fixée librement. On obtient:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_{T+1}$$

donc soit $\lambda_{T+1} = 0$, soit $k_{T+1} = 0$. C'est la condition de transversalité:

$$\lambda_{T+1} k_{T+1} = 0$$

1.1. Cas particulier

(Brock et Mirman - 1972)

$$\max \sum_{t=0}^{+T} \beta^t \ln(c_t), \quad 0 < \beta < 1$$

$$s.c. \quad c_t + k_{t+1} = A k_t^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

• Les conditions du premier ordre s'écrivent:

$$\lambda_{t+2} f'(k_{t+1}) = \lambda_{t+1}$$

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_{t+1}$$

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1}$$

On reitere:

$$k_T = A k_{T-1}^{\alpha} (1 + \alpha\beta) - \alpha\beta (A k_{T-1}^{\alpha-1}) (A k_{T-2}^{\alpha})$$

qui donne:

$$k_{T-1} = \frac{\alpha\beta (1 + \alpha\beta)}{(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2)} (A k_{T-2}^{\alpha})$$

Deuxième itération:

$$k_{T-1} = A k_{T-2}^{\alpha} (1 + \alpha\beta) - \alpha\beta (A k_{T-2}^{\alpha-1}) (A k_{T-3}^{\alpha})$$

qui donne:

$$k_{T-2} = \frac{\alpha\beta (1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2)}{(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + (\alpha\beta)^3)} (A k_{T-3}^{\alpha})$$

etc... d'où

$$k_{T-l+1} = \frac{\alpha\beta \sum_{i=0}^{l-1} (\alpha\beta)^i}{\sum_{i=0}^l (\alpha\beta)^i} (A k_{T-l}^{\alpha}) = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^l}{1 - (\alpha\beta)^{l+1}} (A k_{T-l}^{\alpha})$$

En particulier:

$$k_1 = \frac{\alpha\beta \sum_{i=0}^{T-1} (\alpha\beta)^i}{\sum_{i=0}^T (\alpha\beta)^i} (A k_0^{\alpha}) = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^T}{1 - (\alpha\beta)^{T+1}} (A k_0^{\alpha})$$

2. Croissance Optimale - Hamiltonien

(T.C. Koopmans - 1963; David Cass - 1965)

$$\max \int_0^{+\infty} u(c_t) e^{-\rho t} dt, \quad \rho = -\ln \beta$$

$$s.c. \quad \dot{k} = f(k_t) - k_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ donné}, \quad c_t \geq 0$$

où $u'(0) = +\infty$, $u' > 0$, $u'' < 0$, $f'(0) = +\infty$, $f'(\infty) = 0$, $f' > 0$ et $f'' < 0$.

- Hamiltonien:

$$H = e^{-\rho t} u(c_t) + \lambda_t [f(k_t) - k_t - c_t]$$

- Conditions du premier ordre:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t} u'(c_t) - \lambda_t$$

$$\dot{k}_t = \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = f(k_t) - k_t - c_t$$

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial H}{\partial k_t} = \lambda_t [1 - f'(k_t)]$$

- Evolution de la consommation fonction du temps:

$$\dot{c}_t u''(c_t) e^{-\rho t} = \rho e^{-\rho t} u'(c_t) + \dot{\lambda}_t$$

qui donne

$$\dot{c}_t \left(\frac{-u''(c_t)}{u'(c_t)} \right) = f'(k_t) - (1 + \rho)$$

2.1. Cas particulier

(inspiré de Brock et Mirman - 1972)

$$\max \int_0^{+\infty} \ln c_t e^{-\rho t} dt, \quad \rho = -\ln \beta \quad 0 < \beta < 1$$

$$s.c. \quad \dot{k} = A k_t^\alpha - k_t - c_t, \quad k_0 > 0 \text{ donné}, \quad c_t \geq 0$$

- Conditions du premier ordre:

$$c_t = \frac{e^{-\rho t}}{\lambda_t}$$

$$\dot{k}_t = A k_t^\alpha - k_t - c_t$$

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t [1 - \alpha A k_t^{\alpha-1}]$$

- Evolution de la consommation fonction du temps:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \alpha A k_t^{\alpha-1} - (1 + \rho)$$

- Etat stationnaire: $f'(k_\infty) = (1 + \rho)$ soit $k_\infty = (\alpha A / (1 + \rho))^{1/(1-\alpha)}$. Consommation $c_\infty = k_\infty (1 - \alpha) / \alpha$.

- Stabilité de l'état stationnaire: $\dot{k}_t = g(k_t, c_t)$ et $\dot{c}_t = h(k_t, c_t)$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial k} & \frac{\partial g}{\partial c} \\ \frac{\partial h}{\partial k} & \frac{\partial h}{\partial c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A k_t^{\alpha-1} - 1 & -1 \\ \alpha(\alpha-1) A k_t^{\alpha-2} c_t & \alpha A k_t^{\alpha-1} - (1 + \rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -(1 - \alpha)^2 (1 + \rho) / \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

- Evolution des prix implicites: à l'état stationnaire $\dot{\lambda}_t / \lambda_t = -\rho$
- Condition de transversalité: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_t k_t = 0$