

1. Notion de point fixe - Convergence - Diagramme des phases

Théorème 1. Soit K un compact convexe d'un espace complet X et soit T un opérateur continu sur K . Alors, il existe au moins un point p tel que $T(p) = p$

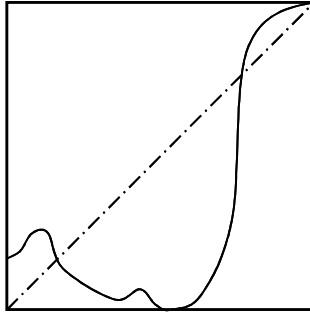


Figure 1.1: Points fixes d'un opérateur

Définition 1. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ un opérateur sur cet espace. On dira que f est contractant si il existe un réel k , $0 \leq k \leq 1$, tel que

$$d[f(x), f(y)] \leq k d(x, y)$$

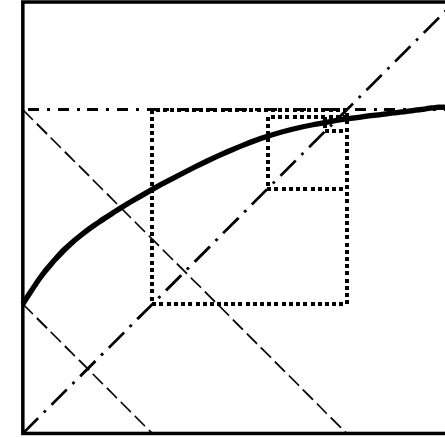


Figure 1.2: Application contractante

1.1. Application à un espace de fonctions:

Définition 2. Soit X un espace de fonctions et $x, y \in X$ deux éléments de cet ensemble. On définit la distance d_∞ de la manière suivante:

$$d_\infty(x, y) = \sup_{t \in \mathcal{D}_X} \|x(t) - y(t)\|$$

où $\mathcal{D}_X$ est le domaine de définition des fonctions de X .

Définition 3. Soit X un espace de fonctions et $x, y \in X$ deux éléments de cet ensemble. On définit la relation d'ordre $\succeq$ sur X de la manière suivante:

$$x \succeq y \Leftrightarrow x(t) \geq y(t) \quad \forall t \in \mathcal{D}_X$$

Théorème 3. Soit T un opérateur sur un espace métrique (X, d_∞) , où X est un espace de fonctions. Supposons que X vérifie les propriétés suivantes:

- (a) Monotonie: $\forall x, y \in X, x \succeq y \Rightarrow T(x) \succeq T(y)$
 - (b) Il existe une fonction constante $c \in X$ de valeur réelle c positive telle que: $\forall x \in X, T(x+c) \preceq T(x) + \beta c$ avec $0 \leq \beta < 1$
- Alors T est un opérateur contractant de module β .

Théorème 4. Soit T un opérateur sur un espace métrique (X, d_∞) , où X est un espace de fonctions. Supposons que X vérifie les propriétés suivantes:

- (a) Monotonie: $\forall x, y \in X, x \succeq y \Rightarrow T(x) \preceq T(y)$
 - (b) Il existe une fonction constante $c \in X$ de valeur réelle c positive telle que: $\forall x \in X, T(x-c) \preceq T(x) + \beta c$ avec $0 \leq \beta < 1$
- Alors T est un opérateur contractant de module β .

Corollaire 1. Soit l'équation du premier ordre $y_{t+1} = \delta y_t + \alpha x_t$, $|\delta| < 1$, où x_t est une suite bornée. Il existe une unique suite bornée qui vérifie cette équation. Elle peut être obtenue par itération de l'opérateur $T(y)_t = \delta y_{t-1} + \alpha x_{t-1}$.