1. Ressources non-renouvelables

Si S_0 est le stock initial et X la quantité de la ressource consommée à la date t, on a:

$$\frac{dS}{dt} = -X \qquad et \qquad \int_0^\infty X\,dt \le S_0$$

Règle d'arbitrage (ou règle d'Hotelling):

$$G(p) = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = r$$

où p est le prix de la ressource et r le taux d'intérêt.

1.1. Le modèle

(Solow 1974)

- Fonction de production à rendements d'échelle constants:

$$Y = A\exp(ht)\,K^a L^b X^{1-a-b}$$

  où $a + b < 1$.

- Maximisation du profit des exploitants:

$$r = a\frac{Y}{K} \qquad w = b\frac{Y}{L} \qquad p = (1-a-b)\frac{Y}{X}$$

- Propension constante à épargner:

$$\frac{dK}{dt} = sY$$

1.1.1. Lien entre taux de croissance et quantité de ressource utilisée:

$$G(Y) = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = h + bG(L) + aG(K) + (1-a-b)\,G(X)$$

En combinant la règle d'Hotelling et la maximisation du profit on obtient:

$$G(p) = G(Y) - G(X) = r = az$$

où $z = Y/K$ est la productivité moyenne du capital. La propension constante à épargner s'écrit avec les mêmes notations: $G(K) = sz$. Notons enfin par $n = G(L)$ le taux de croissance de la population. On obtient

$$G(Y) = h + bn + asz + (1-a-b)(G(Y) - az)$$

donc

$$G(Y) = \frac{h + bn + az(s - (1-a-b))}{a+b}$$

1.1.2. Analyse dynamique:

Soit $x = X/S$ le taux d'extraction. Le taux de croissance de la productivité moyenne du capital est donné par:

$$G(z) = G(Y) - G(K) = \frac{h + bn - z(bs + a(1-a-b))}{a+b}$$

qui est indépendant de x! Le taux d'extraction voit son évolution déterminée par:

$$\begin{aligned} G(x) &= G(X) - G(S) = G(X) + x = G(Y) - az + x \\ &= x + \frac{h + bn - az(1-s)}{a+b} \end{aligned}$$

C'est une fonction croissante de x! Le point d'équilibre stationnaire est un point selle. Ici la dynamique ne permet que de mettre en évidence l'unique état stationnaire non-trivial. Mais le modèle n'explique pas comment les agents de l'économie sélectionnent les trajectoires convergentes *i.e.* pourquoi on peut supposer que cet équilibre est atteint.

1.1.3. Analyse de long terme

Le point stationnaire (qui ne dépend pas de l'état initial) est de coordonnées:

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{h + bn}{(bs + a(1-a-b))} \\ x^* &= \frac{(a-s)(h+bn)}{(bs + a(1-a-b))} = (a-s)\,z^* \end{aligned}$$

La productivité moyenne du capital est une fonction croissante du taux de progrès technique h, du taux de croissance de la population n et une fonction décroissante de la propension à épargner s! En supposant $a > s$, (sinon il n'y a pas d'extraction) le taux d'extraction de long terme a les mêmes propriétés. Un taux de croissance fort entraîne une décroissance rapide des ressources, une importante propension à épargner permet de l'économiser.

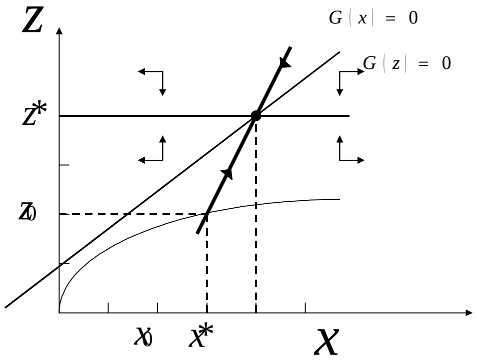

Figure 1.1: Evolution de la productivité moyenne du capital avec le taux d'extraction