1. Oligopole dynamique “à la Cournot”

- N entreprises produisent un bien homogène.
- La demande inverse pour ce bien est donnée par $p(Q) = A - BQ$
- Les coûts de chaque entreprise sont: $C_i(q_i) = \alpha_i + \beta_i q_i + \gamma_i q_i^2$

Il s'agit d'un monopole “à la Cournot”: les entreprises ajustent leur niveau de production q_i pour maximiser leur profits.

1.1. Calcul de la fonction de réaction

$$\pi_i(q_i, q_{j\neq i}) = \left(A - B\left(q_i + \sum_{j\neq i} q_j\right)\right) q_i - \left(\alpha_i + \beta_i q_i + \gamma_i q_i^2\right)$$

La condition du premier ordre (qui ici est suffisante) s'écrit:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = -Bq_i + \left(A - B\left(q_i + \sum_{j\neq i} q_j\right)\right) - (\beta_i + 2\gamma_i q_i) = 0$$

La fonction de réaction (ou de meilleure réponse) est donc:

$$q_i = \frac{A - \beta_i - B\,\Sigma_{j\neq i}\, q_j}{2(B + \gamma_i)}$$

1.2. Une équation fonctionnelle simple

A chaque période, toutes les entreprises ajustent leur production en fonction du niveau de production de la période précédente:

$$\begin{pmatrix} q_1^t \\ q_2^t \\ \ldots \\ q_N^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-B}{2(B+\gamma_1)} & \cdots & \frac{-B}{2(B+\gamma_1)} \\ \frac{-B}{2(B+\gamma_2)} & 0 & & \\ & & \ldots & \\ \frac{-B}{2(B+\gamma_N)} & \cdots & \frac{-B}{2(B+\gamma_N)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{t-1} \\ q_2^{t-1} \\ \ldots \\ q_N^{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A-\beta_1}{2(B+\gamma_1)} \\ \\ \\ \frac{A-\beta_N}{2(B+\gamma_N)} \end{pmatrix}$$

soit

$$Q^t = MQ^{t-1} + N$$

Calcul des itérés de la fonction:

$$\begin{aligned} Q^1 &= MQ^0 + N \\ Q^2 &= MQ^1 + N = M^2 Q^0 + (M+1) N \\ &\ldots \\ Q^t &= M^t Q^0 + \left(\sum_{k=0}^{t-1} M^k\right) N \end{aligned}$$

Il y a convergence si les valeurs propres de la matrice sont dans le cercle unité. Dans ce dernier cas, la production à l'équilibre $Q^\infty = \left(\Sigma_{k=0}^{\infty} M^k\right) N$ est indépendante des parts de marché initiales Q^0.

1.3. Etude de la dynamique dans quelques cas particuliers

1.3.1. Cas du duopole

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres sont les solutions de $Z^2 - b_1 b_2 = 0$ soit $\pm\sqrt{(b_1 b_2)}$.
- Les vecteurs propres associés sont $\left(\mp\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}\right)$.

1.3.2. Cas de N entreprises identiques

- Les valeurs propres sont: $-(N-1)\,b$, et b valeur propre multiple.
- Les vecteurs propres associés sont respectivement $(1, 1, ..., 1)$ et $(-1, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$.

S'il y a beaucoup d'entreprises, il n'y aura donc pas convergence vers l'équilibre.