Modèles dynamiques de l'économie
TD n^o1

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 2002-2003

1. Concurrence oligopolistique "à la Bertrand"

L'objet du présent problème est l'étude d'un oligopole dynamique "à la Bertrand", c'est-à-dire de la concurrence en prix à laquelle se livre un groupe d'entreprises. On considère l'économie décrite par les hypothèses suivantes:

i) N entreprises produisent chacune un bien homogène.

ii) La fonction de demande directe pour le bien i est $q_i(p_i, p_j) = \alpha_i - \beta_i p_i + \sum_{j \neq i} \gamma_j p_j$, $\forall j \neq i$ où p_i représente le prix du bien i pour $i = 1, ..., N$.

iii) Les coûts de production du bien i sont $C_i(q_i) = a_i q_i^2 + b_i q_i + c_i$.

Dans tout le problème, on supposera que les entreprises ajustent le prix de vente de leur produit p_i afin maximiser leur profits.

1. Ecrire le profit de l'entreprise i et déterminer sa fonction de meilleure réponse. Commenter.

2. On suppose que chaque entreprise ne peut déterminer le comportement des consommateurs que pour de faibles variations de prix. Par conséquent, elle ajuste ses prix proportionnellement à l'augmentation marginale de son profit, ce qui permet de formuler l'équation dynamique suivante:

$$\text{“}\Delta p = k\Delta\Pi\text{”} \tag{1}$$

   Ecrire le système dynamique correspondant en temps continu.

3. Montrer que, sous certaines conditions que l'on supposera vérifiée, le système précédent peut se réécrire sous la forme d'un système homogène du type:

$$\dot{P}_t = AP_t \tag{2}$$

   où P_t représente le vecteur des prix à la date t , $\dot{P}_t$ *sa* dérivée par rapport au temps et A est la matrice des coefficients.

4. On considère les spécifications suivantes pour $N = 3$ entreprises:
   $\beta_1 = \beta_3 = 1, \beta_2 = \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{3}, \gamma_2 = 1$; $a_1 = a_3 = 1, a_2 = 2$.
   Réécrire le système dynamique (2). Commenter.

5. Déterminer pour $k = 1$ le système de prix d'équilibre et en étudier la stabilité. Que se passe-t'il si l'on fait varier k ?

6. A présent, on suppose que l'économie évolue en temps discret. Quelle serait l'équation à considérer? Si l'on considère l'équation d'évolution des prix suivante: $P_{t+1} = AP_t$, déterminer l'évolution des prix pour les mêmes valeurs de coefficients qu'à la question 4 et en étudier la stabilité.

2. Correction

1. Le profit de l'entreprise i s'écrit:

$$\pi_i = p_i q_i - C_i(q_i) = p_i q_i - \left(a_i q_i^2 + b_i q_i + c_i\right)$$

où $q_i(p_i, p_j) = \alpha_i - \beta_i p_i + \gamma_j p_j$. La fonction de profit est strictement concave. La condition du premier ordre qui dérive de la maximisation du profit est donc une condition nécessaire et suffisante pour avoir un maximum. Elle s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} &= q_i + \left[p_i - C_i'(q_i)\right]\frac{\partial q_i}{\partial p_i} \\ &= q_i + \left[p_i - 2a_i q_i - b_i\right](-\beta_i) \\ &= (1 + 2a_i\beta_i)\, q_i - \beta_i (p_i - b_i) \\ &= (1 + 2a_i\beta_i)(\alpha_i + \gamma_j p_j) + \beta_i b_i - 2\beta_i p_i (1 + a_i\beta_i)\end{aligned}$$

Par suite, la fonction de meilleure réponse est donnée par:

$$p_i = \frac{(1 + 2a_i\beta_i)(\alpha_i + \gamma_j p_j) + \beta_i b_i}{2\beta_i (1 + a_i\beta_i)}$$

2. Si l'entreprise maximise son profit par un processus d'ajustement en temps continu, le système dynamique s'écrit:

$$\frac{dp_i}{dt} = k \left.\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}\right]_t = k\left[(1 + 2a_i\beta_i)(\alpha_i + \gamma_j p_j) + \beta_i b_i - 2\beta_i p_i (1 + a_i\beta_i)\right]$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{dp_i}{dt} = k\left[M_{ii} p_i + M_{ij} p_j + N_i\right]$$

avec $M_{ii} = -2\beta_i (1 + a_i\beta_i)$, $M_{ij} = \gamma_j (1 + 2a_i\beta_i)$ et $N_i = \alpha_i (1 + 2a_i\beta_i) + \beta_i b_i$. Par suite, on a:

$$\frac{dP}{dt} = kMP + kN$$

3. Le système dynamique précédent s'écrit sous la forme:

$$\dot{P}_t = MP_t + N$$

En posant $P_t = X_t - O$ on obtient:

$$\dot{X}_t = MX_t - MO + N$$

Si $N \in Im(M)$, il existe O tel que $N = MO$ ce qu'on suppose vérifié. Pour trouver O, on utilise le fait que la matrice M est solution de son polynôme charactéristique: $\Phi(M) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k M^k$. Si $\underline{\varphi} = \varphi_{\underline{k}}$ où $\underline{k}$ est le plus petit indice pour lequel φ_k est non nul, on peut ré-écrire ce polynôme sous la forme:

$$\Phi(M) = \varphi_{\underline{k}} M^{\underline{k}} \left(I + M \sum_{k=\underline{k}+1}^{N} \frac{\varphi_k}{\varphi_{\underline{k}}} M^{k-\underline{k}-1} \right)$$

Si M est diagonalisable, $E = KerM \oplus ImM$. On peut alors poser $O = -\sum_{k=\underline{k}+1}^{N} \frac{\varphi_k}{\varphi_{\underline{k}}} M^{k-\underline{k}-1} N$.

4. Pour l'entreprise 1 et 3, on a: $M_{11} = M_{33} = -4$; $M_{13} = M_{31} = 1$; $M_{12} = M_{32} = 3$ et $N_{i=1,3} = 3\alpha_i + b_i$. Pour l'entreprise 2, on a: $M_{22} = -2$, $M_{21} = M_{23} = 7/9$ et $N_2 = 3\alpha_2 + b_i/2$. Par suite la matrice A s'écrit:

$$A = k \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

On écrit la décomposition en vecteurs propres $AX = \lambda X$. La décomposition donne les résultats suivants:

$$\left[-5 \leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right], \left[0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

5. Dans la base de vecteurs propres, le système s'écrit:

$$\frac{dX}{dt} = k\Lambda X$$

Dans cette même base, les solutions s'écrivent:

$$x_i(t) = x_i(t_0) \exp\left[k\lambda_i (t - t_0)\right]$$

Le système est stable car les valeurs propres sont négatives ou nulles. On converge donc toujours vers un équilibre X donné par $MX = 0$ (soit $X \in KerM$). Dans le système initial, il est donc donné par un point de $O + KerM$. Une valeur de k élevée accélère la convergence vers l'équilibre.

6. En temps discret, le système à considérer s'écrirait:

$$P_{t+1} = (A + I_d) P_t.$$

Si l'on considère $P_{t+1} = AP_t$, les solutions s'écrivent sous la forme:

$$x_i(t) = k^t \lambda_i^t x_i(0).$$

Il n'y a donc convergence que si $\|k\lambda_i\| < 1$. Pour $k = 1$, il n'y a donc pas stabilité. De grande valeurs de k ralentissent la convergence.