Modèles dynamiques de l'économie

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Université de Toulouse I

Juin 2003

Cet examen est composé de deux problèmes indépendants. Les documents de cours ainsi que tout appareil électronique sont strictement interdits. Le barème est donné seulement à titre indicatif.

Cohérence temporelle des politiques économiques

(6 pts)

On s'intéresse à l'action d'un gouvernement dont on résume l'horizon temporel à deux périodes: période 1 (le présent) et période 2 (le futur). A chaque période i le gouvernement peut entreprendre une action (par exemple appliquer une certaine politique fiscale) notée π_i. L'ensemble des agents économiques du pays réagit à ce choix d'action en prenant à son tour un ensemble de décisions appropriées (par exemple une décision d'épargne). On note x_i la variable caractérisant l'action des agents économiques à la période i. On suppose que π_1, π_2, x_1, x_2 sont des variables réelles.

Les agents connaissent les actions annoncées par le gouvernement et fondent leurs propres décisions dessus; on a donc $x_1 = X_1(\pi_1, \pi_2)$ et $x_2 = X_2(x_1, \pi_1, \pi_2)$. L'objectif du gouvernement est de maximiser un critère de surplus social donné par la fonction $S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2)$. Toutes les fonctions sont supposées différentiables.

Question 1 (2 pts): On se place au début de la première période. Ecrire les conditions du premier ordre correspondant au fait que les actions que le gouvernement prévoit d'entreprendre π_1 et π_2 maximisent le surplus social (on gardera une expression littérale sans chercher à simplifier).

Question 2 (1 pt): On se place maintenant au début de la deuxième période. Les variables π_1 et X_1 correspondent à des actions passées et sont donc fixées. Ecrire la condition du premier ordre correspondant au fait que l'action π_2 que le gouvernement souhaite maintenant entreprendre maximise le surplus social.

Question 3 (1,5 pts): En utilisant les deux questions précédentes, établir une condition pour que l'action π_2^* optimale au début de la période 1 soit toujours

optimale au début de la période 2.
Question 4 (1,5 pts): Commenter et interpréter le résultat obtenu à la question 3, en supposant que $\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \neq 0$, (5 lignes maximum).

Modification des prix et ajustement des facteurs de production

(14 + 3pts)

Dans ce problème, on s'intéresse aux conséquences d'un changement du prix du facteur de production travail (L) pour une entreprise. Pour simplifier, on suppose que le travail est l'unique facteur de production de l'entreprise et qu'elle vend sa production au prix $p = 1$ sur un marché concurrentiel. Suite à une modification du prix du travail, l'entreprise va vouloir ajuster sa quantité de main-d'œuvre. On note L_t la main d'œuvre employée au début de la période t et u_t le flux d'embauches au cours de cette période (c'est à dire que l'on a $L_{t+1} = L_t + u_t$). Pour diverses raisons, on suppose que le niveau de production à la période t est donné par la fonction de production $F(L_t, L_{t+1}) = f(\min\{L_t, L_{t+1}\})$ où $f(.)$ est une fonction à valeurs réelles.

Question 1 (1,5 pts): Proposez une interprétation de cette fonction de production (5 lignes maximum).

L'entreprise évalue ses profits futurs avec un facteur d'escompte δ, tel que $0 < \delta < 1$. Si on note π_t son profit (instantané) à la période t, son profit escompté à la date 0 vaut: $\Pi = \sum_{t=0}^{T} \delta^t \pi_t$, où T est l'horizon temporel de l'entreprise. On suppose dans un premier temps que T est fini. L'évolution du prix du travail sur la période $\{0, 1, 2, ..., T\}$ est donnée par la suite $p_{L,t}$.

Question 2 (1,5 pts): On suppose que les nouveaux embauchés sont payés pour toute la période. On suppose également qu'un employé licencié au cours d'une période est payé jusqu'à la fin de la période. Ecrire l'expression du profit instantané π_t de l'entreprise au cours de la période t. On pourra distinguer le cas où l'entreprise embauche ($u_t = L_{t+1} - L_t$ positif) de celui où elle débauche ($u_t = L_{t+1} - L_t$ négatif).

Question 3 (1 pt): Dans le cas d'un régime stationnaire, c.a.d. si les prix sont constants et l'entreprise n'embauche ni ne débauche ($p_{L,t} = p_L$ et $L_{t+1} = L_t = L$) pour quelle valeur de L le profit instantané est-il maximum? (On donnera l'équation qui permet de la déterminer)
Dans la suite du problème on notera cette valeur L^*.

Question 4 (3 pts): Ecrire le programme de maximisation l'entreprise en précisant bien la fonction de transition. Quelles sont les variables d'état et de contrôle? En déduire l'équation de Bellman vérifiée par la fonction $V_t(L)$ qui caractérise la valeur attribuée par l'entreprise au stock de main d'œuvre L, au début de la période $t < T$.

On suppose pour la question qui suit que l'entreprise ferme et cesse toute production à la fin de la période $T < +\infty$.

Question 5 (2 pts): On se place à la période $T + 1$. Calculer V_{T+1} sachant que, même si l'entreprise a cessé de produire, elle doit payer tous les employés qui ont commencé une période chez elle. En déduire l'équation vérifiée par u_T puis expliquer comment résoudre l'ensemble du problème pour obtenir $V_0(L_0)$.
(Ne pas chercher à calculer cette fonction).

On s'intéresse maintenant et pour la suite du problème au cas $T = +\infty$. On suppose également que $p_{L,t} = p_L$, pout tout t (il y a un choc sur le prix du travail à la date 0, puis le prix reste constant).

Question 6 (1 pt): Ecrire l'équation de Bellman du problème.

Question 7 (4 pts): On suppose maintenant que $L_0 \ll L^*$ si bien que l'entreprise doit augmenter sa main d'oeuvre. Résoudre l'équation de Bellman en supposant $u_t \geq 0$. On distinguera bien les trois étapes de la résolution: condition du premier ordre sur la variable de contrôle, dérivée de la fonction valeur, équation de la dynamique. En admettant que toutes les solutions sont "intérieures" (que la variable u_t optimale est bien positive), quelle est l'équation vérifiée par la valeur de L dans le régime stationaire? On notera cette valeur $L^\dagger$. Au bout de combien de périodes cette valeur sera-t-elle atteinte?

Question 8 (3 pts bonus): Dans le cas, $L_0 \gg L^*$, où l'entreprise doit réduire sa main d'oeuvre, on peut montrer que si $u_t \leq 0$ alors L_t va converger en une période vers $L^{\dagger\dagger}$ où $L^{\dagger\dagger}$ vérifie

$$f'\left(L^{\dagger\dagger}\right) = \delta p_L.$$

Monter que si $f(.)$ est croissante concave, alors $L^\dagger < L^* < L^{\dagger\dagger}$. Expliquez. Que se passe-t-il dans cas $L^\dagger < L_0 < L^{\dagger\dagger}$, où L_0 est la main d'oeuvre initiale ? Expliquez et commentez.

1 Eléments de correction

1.1 Problème 1

Question 1: (2pts) La C.P.O de la maximisation du surplus social s'écrit:

$$\frac{dS}{d\pi_1} = 0 \quad et \quad \frac{dS}{d\pi_2} = 0.$$

On a donc le système:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \pi_1} + \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1}\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \pi_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial S}{\partial \pi_2} + \frac{\partial X_1}{\partial \pi_2}\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \pi_2}\frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{\partial X_1}{\partial \pi_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Question 2: (1 pt) Au début de la période 2, on maximise le surplus social comme une fonction de la seule variable π_2. La C.P.O.$(dS/d\pi_2) = 0$ s'écrit:

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_2} + \frac{\partial X_2}{\partial \pi_2}\frac{\partial S}{\partial x_2} = 0.$$

Question 3: (1,5 pts) Pour que la politique calculée en première période soit toujours optimale en deuxième période il faut que π_2^* soit solution des équations $(dS/d\pi_2) = 0$ obtenue à la première question et à la deuxième. Par suite on doit avoir:

$$\frac{\partial X_1}{\partial \pi_2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = 0.$$

On dit que ce cas que la politique π_2^* est cohérente temporellement.
Question 4: (1,5 pts) Si $\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \neq 0$, pour que le gouvernement ne change pas de politique (par rapport à ce qu'il avait prévu _ou promis_ de faire), il faut que $(\partial X_1/\partial \pi_2) = 0$. En d'autres termes il faut que l'action choisie par les agents en période 1 ne dépende pas de la politique de deuxième période. Cette condition a évidement peu de chances d'être réalisée. Si les agents anticipent vraiment la politique de deuxièment période et adaptent en conséquence leur action de première période (pas de comportement myope), la politique ne sera pas cohérente temporellement. Le gouvernement aura tendance à modifier la politique qu'il avait prévu de faire initiallement.

1.2 Problème 2

Question 1: (1,5 pts) La fonction de production $F(L_t, L_{t+1}) = f(\min\{L_t, L_{t+1}\})$ s'écrit $F(L_{t+1}, L_t) = f(L_t)$ si $L_t \leq L_{t+1}$. Un employé n'est productif qu'après un certain temps d'apprentissage et donc en période de croissance, l'effet d'une embauche ne se voit qu'avec un certain décalage dans le temps. En période de récession, $L_{t+1} \leq L_t$ et la fonction de production s'écrit $F(L_{t+1}, L_t) = f(L_{t+1})$. On peut ajuster sans délai le niveau de main d'oeuvre à la baisse.

Question 2: (1,5 pts) Si les nouveaux embauchés et les licenciés sont payés pour toute la période, la masse salariale s'écrit $\max\{L_t, L_{t+1}\}$. Le profit instantané de l'entreprise s'écrit:

$$\pi_t = pF(L_t, L_{t+1}) - p_{L,t} \max\{L_t, L_{t+1}\}$$

Si $L_t \leq L_{t+1}$ on a $\min\{L_t, L_{t+1}\} = L_t$ et $\max\{L_t, L_{t+1}\} = L_{t+1}$. En utilisant $p = 1$, on obtient $\pi_t = f(L_t) - p_{L,t}L_{t+1}$. Dans le cas contraire, c.a.d. si $L_t \geq L_{t+1}$, on a $\pi_t = f(L_{t+1}) - p_{L,t}L_t$.

Question 3: (1 pt) Dans le cas du régime stationnaire, le profit instantané est maximum pour $L = L^*$ tel que:

$$f'(L^*) = p_L$$

Question 4: (3 pts) Le programme de maximisation l'entreprise s'écrit

$$\max_{\{L_t\}_{t=1}^{T}} \left\{ \sum_{t=0}^{T} \delta^t \pi_t \right\} \quad s.l.c.\ L_{t+1} = L_t + u_t.$$

A la période t, les variables de contrôle sont u_t (et L_{t+1}) et les variables d'état L_t et p_t. L'équation de Bellman s'écrit:

$$V_t(L_t) = \max_{u_t} \{\pi_t + \delta V_{t+1}(L_{t+1})\}$$

Question 5: (2 pts) Même si elle ne vend plus, l'entreprise doit continuer à payer les employés. Donc $V_{T+1} = -p_{L,T+1}L_{T+1}$. Par suite l'entreprise doit résoudre

$$\max_{u_t} \{\pi_T(L_T, L_{T+1}) + \delta V_{T+1}(L_{T+1})\} = \max_{u_t} \{f(L_{T+1}) - p_{L,T}L_T - \delta p_{L,T+1}L_{T+1}\}$$

Donc u_T vérifie $f'(L_T + u_T) = \delta p_{L,T+1}$. On peut donc en déduire $V_T(L)$. Pour trouver $V_0(L_0)$, on résoud par itération, en commençant par la dernière période.

Question 6: (1 pt) l'équation de Bellman du problème s'écrit:

$$\begin{aligned} V(L_t) &= \max_{u_t} \{\pi_t + \delta V(L_{t+1})\} = \max_{u_t} \{F(L_t, L_{t+1}) - p_{L,t} \max\{L_t, L_{t+1}\} + \delta V(L_{t+1})\} \\ s.l.c.\quad L_{t+1} &= L_t + u_t. \end{aligned}$$

NB: cette fois-ci $V(L)$ ne dépend pas de la date.

Question 7: (4 pts) Dans le cas $u_t \geq 0$, l'équation de Bellman s'écrit:

$$V(L_t) = \max_{u_t \geq 0} \{f(L_t) - p_{L,t}L_{t+1} + \delta V(L_{t+1})\}$$

avec $L_{t+1} = L_t + u_t$.
La condition du premier ordre qui détermine la variable de contrôle s'écrit:

$$-p_{L,t} + \delta V'(L_t + u_t) = 0$$

On obtient alors directement la dérivée de la fonction valeur en écrivant:

$$V'(L_t) = f'(L_t) - p_{L,t}\left(1 + \frac{du_t^*}{dL_t}\right) + \delta\left(1 + \frac{du_t^*}{dL_t}\right)V'(L_t + u_t)$$

où u_t^* est la solution de la condition du premier ordre précédente. On utilise cette condition pour obtenir (théorème de l'enveloppe) $V'(L_t) = F'(L_t)$.
Finalement, on obtient

$$-p_{L,t} + \delta f'(L_t + u_t) = 0.$$

$L^{\dagger}$ vérifie donc $f'\left(L^{\dagger}\right) = p_L/\delta$. Cette valeur sera atteinte dès la première période.
Question 8: (3 pts bonus) Si $f(.)$ est croissante concave, sa dérivée est décroissante donc $f'\left(L^{\dagger\dagger}\right) < f'(L^*)$ implique $L^{\dagger\dagger} > L^*$. (Et de même $f'\left(L^{\dagger}\right) > f'(L^*)$ implique $L^{\dagger} < L^*$). Quand on réduit la main d'oeuvre, on s'arrête avant le niveau L^* car la réduction de main d'oeuvre a un coup puisqu'il faut continuer de la payer pendant une période. (Si le niveau de main d'oeuvre n'est pas trop important, on préfère la garder). De même si quand on augmente la main d'oeuvre, on s'arrête avant L^* car augmenter sa main d'oeuvre a un coup puisqu'il faut la payer pendant une période avant quelle soit efficace. (Si le gain marginal apporté par le supplément de main d'oeuvre est faible, on préfère s'en passer).
Si $L^* < L_0 < L^{\dagger\dagger}$, on en peut pas à la fois avoir $u_t \leq 0$ (réduire la main d'oeuvre) et converger vers $L^{\dagger\dagger}$. La main d'oeuvre va donc rester à son niveau initial, tout ajustement ayant un coût trop élevé. De même si $L^{\dagger} < L_0 < L^*$, on en peut pas à la fois avoir $u_t \geq 0$ (augmenter la main d'oeuvre) et converger vers $L^{\dagger\dagger}$. En conclusion, si $L^{\dagger} < L_0 < L^{\dagger\dagger}$, c.a.d. si "on n'est pas trop loin" de la quantité optimale, il n'y aura pas d'ajustement.