# Modèles dynamiques de l'économie

Cours de E. Billette de Villemeur
Maîtrises d'économétrie / Magistère (U.E. 3)
Université de Toulouse I

septembre 2002

**Avertissement:** La durée de l'épreuve est de 1h30. Le barème est donné seulement à titre indicatif. La calculatrice est inutile et interdite.

## 1 Investissement optimal d'une entreprise

*Mots clefs:* Investissement en capital, optimisation en temps discret et continu, equation de Bellman, Hamiltonien, état stationnaire.

**Le modèle:**
Dans ce problème on étudie la politique d'investissement optimal d'une entreprise d'abord en temps discret, puis en temps continu. Le stock de capital $K_t$, qui se déprécie à un taux constant $\delta > 0$, est utilisé pour produire et commercialiser un bien de consommation finale. Pour simplifier cette étude, on ne modélise pas le marché de ce bien pour ne retenir que la fonction de revenu $F(K_t)$. Soit $I_t$ l'investissement réalisé par l'entreprise à la date $t$. Cet investissement permet d'accroitre le capital productif mais il coûte à l'entreprise $C(I_t)$. L'entreprise cherche le plan optimal d'investissement qui, en tenant compte de l'équation d'accumulation du capital, maximise la somme actualisée de ses profits. On note $\beta = 1/(1+r)$ le facteur d'escompte, où $r$ est le taux d'intérêt, supposé constant.

1. (2 pts) Ecrire l'équation d'accumulation du capital et le programme de l'entreprise en temps discret. Commenter les hypothèses ainsi que le rôle des différentes variables.

2. (1.5 pts) Ecrire l'équation de Bellman à la date $t$.

3. (3 pts) Dans le cas où $F(K_t) = AK_t^\alpha$ et $C(I_t) = CI_t^\alpha$, montrer que la solution du problème de maximisation dynamique peut s'écrire sous la forme $V(K) = EK^x$ où $E$ et $x$ sont des paramètres constants à déterminer.
   NB: Pour le choix de $x$, on se laissera guider par le fait que cette valeur permet une résolution explicite (et simple) du problème. Pour le calcul de $E$, on se contentera d'indiquer la démarche à suivre *c.a.d.* de donner les équations qui permettent d'en établir la valeur, sans pour autant mener les calculs jusqu'au bout.

4. (2 pts) Toujours dans le cas où $F(K_t) = AK_t^\alpha$ et $C(I_t) = CI_t^\alpha$, calculer le niveau d'investissement en fonction du niveau de capital quand le système est à l'état stationnaire. En déduire (par cette autre méthode) la valeur explicite de $E$.

5. (3 pts) Afin de résoudre le problème d'une manière plus générale, on passe à une formulation en temps continu. On suppose que $F(.)$ est croissante concave et $C(.)$ est croissante convexe. Ecrire l'équation d'accumulation du capital, le programme de l'entreprise et le Hamiltonien qui y correspond.
   (On pourra noter par $p_t$ la variable adjointe à la variable d'état).

6. (2,5 pts) Donner les équations de Hamilton (Etablir les conditions du premier ordre), sans oublier la condition de transversalité. Quelle est l'interprétation économique de $p_t$ ?

7. (3 pts) Etablir les équations de la dynamique du système puis tracez le diagramme de phase dans le plan $(K_t, I_t)$ pour étudier la dynamique d'évolution de ces deux variables.

8. (3 pts) Donnez les équations qui caractérisent l'état stationnaire $(K_t^*, I_t^*)$ du système dynamique. En linéarisant ce dernier autour de $(K_t^*, I_t^*)$, montrer qu'il s'agit toujours d'un point selle. Pourquoi peut-on quand même affirmer que les seules solutions du programme de l'entreprise sont constituées par les trajectoires qui convergent vers ce point?

# Eléments de correction

**Question 1:** L'équation d'accumulation du capital s'écrit:

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$$

Cette équation ne fait pas autre chose que de stipuler que l'investissement net est égal à l'investissement brut moins la dépréciation. Le programme de l'entreprise s'écrit donc:

$$\begin{array}{l} \max\limits_{\{I_t\}_{t=0}^{+\infty}} \sum\limits_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left[F\left(K_t\right) - C\left(I_t\right)\right] \\ s.l.c. \quad K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t \end{array}$$

où $K_t$ est la variable d'état et $I_t$ la variable de contrôle.

**Question 2:** L'équation de Bellman à la date $t$ s'obtient en écrivant:

$$\begin{aligned} V\left(K_t\right) &= \max_{\{I_{t+k}\}_{k=0}^{+\infty}} \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k \left[F\left(K_{t+k}\right) - C\left(I_{t+k}\right)\right] \\ &= \max_{I_t} \left\{ \left[F\left(K_t\right) - C\left(I_t\right)\right] + \max_{\{I_{t+k}\}_{k=1}^{+\infty}} \sum_{k=1}^{+\infty} \beta^k \left[F\left(K_{t+k}\right) - C\left(I_{t+k}\right)\right] \right\} \\ &= \max_{I_t} \left\{ F\left(K_t\right) - C\left(I_t\right) + \beta V\left(K_{t+1}\right) \right\} \end{aligned}$$

**Question 3:** Dans le cas où $F\left(K_t\right) = AK_t^{\alpha}$ et $C\left(I_t\right) = CI_t^{\alpha}$, l'équation de Bellman s'écrit:

$$\begin{aligned} V\left(K_t\right) &= \max_{I_t} \left\{ AK_t^{\alpha} - CI_t^{\alpha} + \beta V\left(K_{t+1}\right) \right\} \\ s.l.c. \quad K_{t+1} &= K_t + I_t - \delta K_t. \end{aligned}$$

Supposons que $V\left(K\right)$ soit de la forme $EK^x$. La quantité d'investissement optimal est donnée par la condition du premier ordre:

$$-\alpha CI_t^{\alpha-1} + x\beta E\left(K_t + I_t - \delta K_t\right)^{x-1} = 0$$

Une valeur de $x$ qui permette de résoudre simplement le système (et d'avoir $V\left(K\right)$ solution de l'équation de Bellman) est $x = \alpha$. On obtient alors:

$$\left(\frac{K_t + I_t - \delta K_t}{I_t}\right) = \left(\frac{C}{\beta E}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

qui permet d'établir que l'insvestissement est proportionnel au stock du capital:

$$I_t = \frac{(1-\delta)}{(\beta E/C)^{1/(1-\alpha)} - 1} K_t$$

Pour trouver $E$, on procède par identification:

$$V(K) = EK^\alpha = AK_t^\alpha - C(I_t^*)^\alpha + \beta E(K_t + I_t^* - \delta K_t)^\alpha$$

Il apparait donc clairement que $V(K) = E\,K^\alpha$ est une solution. Si le problème est bien défini (convexe), l'équation de Bellman admet une unique solution. C'est donc *la* solution.

**Question 4:** A l'état stationnaire on a $K_{t+1} = K_t$ donc $I_\infty = \delta K_\infty$. On a donc également $V(K_{t+1}) = V(K_t)$ donc

$$(1-\beta) V(K_\infty) = AK_\infty^\alpha - C(\delta K_\infty)^\alpha$$

et

$$E = \frac{A - \delta^\alpha C}{1-\beta}$$

**Question 5:** En temps continu, l'équation d'accumulation du capital s'écrit:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) - \delta K(t)$$

Le programme de l'entreprise s'écrit donc:

$$\begin{aligned} &\max_{I(t)} \int_0^{+\infty} \{F[K(t)] - C[I(t)]\} e^{-rt} dt \\ &s.l.c. \quad \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \end{aligned}$$

Le Hamiltonien (en valeur courante) a pour expression:

$$H(I, K, p) = F(K) - C(I) + p[I - \delta K]$$

où $p(t)$ est la variable d'état adjointe.

**Question 6:** $p(t)$; la variable adjointe est le prix implicite du capital. La condition du premier ordre s'écrit:

$$\frac{\partial H}{\partial I} = p - C'(I) = 0 \tag{1}$$

Elle stipule que ce prix implicite est exaactement égal au coût marginal de l'investissement. Les équations de Hamilton sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{K} = I - \delta K \\ \frac{\partial H}{\partial K} &= r\,p - \dot{p} = F'(K) - \delta p \qquad (2) \end{aligned}$$

Enfin la condition de transversalité s'écrit:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$$

**Question 7:** On dérive la condition du premier ordre par rapport au temps (Eq 1) et on utilise l'équation 2 pour obtenir:

$$\overset{\bullet}{p} = \overset{\bullet}{I}\, C''(I) = (\delta + r)\, p - F'(K) = (\delta + r)\, C'(I) - F'(K)$$

par suite:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{K} &= I - \delta K \\ \overset{\bullet}{I} &= \frac{(\delta + r)\, C'(I) - F'(K)}{C''(I)} \end{aligned}$$

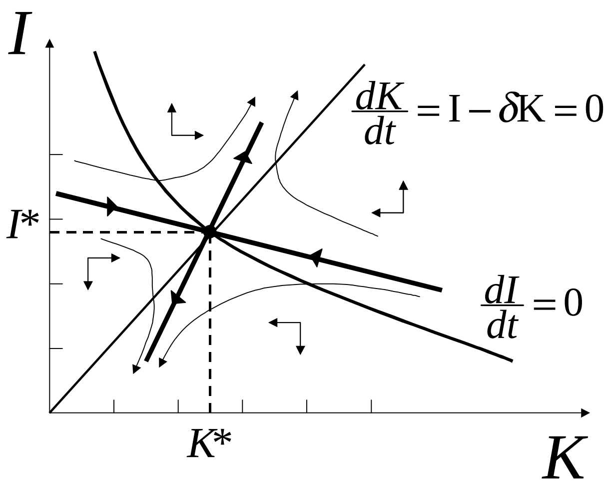


Figure 1:

**Question 8:** L'état stationnaire est défini par $\overset{\bullet}{K} = \overset{\bullet}{I} = 0$. On a donc $I^* = \delta K^*$ et $K^* = (F')^{-1}[(\delta + r)\, C'(I^*)]$. On linéarise le système précédent pour obtenir:

$$\begin{pmatrix} \overset{\bullet}{K} \\ \overset{\bullet}{I} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -\delta & 1 \\ \frac{-F''(K^*)}{C''(I^*)} & \delta + r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K - K^* \\ I - I^* \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est clairement négatif (concavité de $F$, convexité de $C$):

$$-\delta(\delta + r) + \frac{F''(K^*)}{C''(I^*)} < 0$$

Par suite, les deux valeurs propres sont de signe opposé: on a bien un point selle. On peut affirmer qu'il y a convergence grâce à la condition de transversalité qui permet d'exclure *a priori* les trajectoires divergentes.