Modèles dynamiques de l'économie

Cours de E. Billette de Villemeur
Maîtrises d'économétrie / Magistère (U.E. 3)
Université de Toulouse I

septembre 2001

Avertissement: La durée de l'épreuve est de 1h30. Le barème est donné seulement à titre indicatif. La calculatrice est inutile et interdite.

1 Modèle de croissance avec ressource épuisable et substitut renouvelable

Mots clefs: Optimisation en temps continu, Hamiltonien, Ressource épuisable, Innovation.

Présentation générale: Ce modèle est une adaptation de Dasgupta & Heal [1979] par G. Lafforgue. Il vise à appuyer la thèse de Maddox [1971] selon laquelle l'épuisement d'une ressource non-renouvelable précèderait la mise en place d'un substitut. Sa résolution a permis d'analyser le phénomène d'intense déforestation qu'a connu l'Angleterre au XVI^e siècle. La forêt était alors considérée à court terme comme une ressource épuisable. A mesure que les réserves de bois s'amenuisaient, le prix du bois augmentait si fortement que l'incitation à développer un substitut devenait très grande, ce qui a conduit à la recherche et la mise en place de procédés rentables d'extraction du charbon. Selon cette thèse, on pourrait donc accorder moins de poids au futur et accepter une gestion de court terme de la ressource qui soit plus généreuse, laissant aux forces du marché le soin d'inciter à l'innovation. En pratique, on va ici comparer, à travers un modèle standard de croissance "à la Ramsey", une situation dans laquelle aucun substitut à la ressource n'est envisageable et une situation dans laquelle un substitut apparaîtra à une date incertaine.

Le modèle: On considère les hypothèses suivantes. La fonction d'utilité instantanée $U(C_t)$ est croissante et concave en C_t le niveau courant de consommation. Le bien de consommation est produit à partir de deux facteurs parfaitement substituables, du capital accumulable K_t et une ressource épuisable de stock courant S_t et de flux R_t, selon la technologie $G(K_t, R_t)$. La fonction de production G est croissante, concave et les rendements d'échelle sont constants. Les niveaux initiaux de stocks de capital et de ressource sont donnés: K_0 et S_0. On suppose que l'amortissement du capital productif est nul et que la part de production non consommée est investie dans la création de nouveau capital. Le taux d'actualisation correspond au taux d'intérêt r et est constant dans le temps. Dans tout le problème, on adoptera la formalisation en temps continu.

L'étude est subdivisée en trois parties. On considère d'abord la question de la gestion optimale d'une ressource épuisable. On passe ensuite au cas où cette ressource n'est utile que jusqu'à une certaine date T où la technologie de production change. A partir de cette date, un substitut parfait de la ressource permet de continuer à produire le bien de consommation selon la nouvelle technologie $H(K_t, Z_t)$ où Z_t dénote le flux de service produit par le substitut. Ce substitut est accumulable (son niveau courant de stock est noté V_t) et se régénère au flux constant M. On suppose que la fonction H décrit une technologie "backstop", c'est-à-dire qu'elle rend obsolète les stocks de capital et de ressource subsistant après T. Cette date devra donc correspondre à l'épuisement total de la ressource. Enfin, on considère le cas où T est une variable aléatoire de densité $f(t)$ et de fonction de répartition $F(t)$.

1. (2 pts) Le planificateur cherche à déterminer les politiques optimales de consommation et d'extraction d'une société ayant une durée de vie infinie. Ecrire le programme optimal dans le cas certain où aucun substitut ne sera jamais découvert. Le commenter.

2. (2 pts) Montrer que la consommation vérifie la règle optimale d'évolution de Keynes-Ramsey suivante:
$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{G_K - r}{\sigma(C_t)}$$
où $\sigma(C_t) = -C_t U''(C_t)/U'(C_t)$ est l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation.

3. (4 pts)Notons $x_t = K_t/R_t$ le rapport des deux facteurs productifs. En utilisant l'homogénéité de degré un de G (rendements d'échelle constants), montrer que la production moyenne d'une unité de ressource $g = G(K_t, R_t)/R_t$ ne dépend que de x_t. Calculer G_K et G_R en fonction de x, de la fonction $g(x)$ et de ses dérivées puis montrer que la règle optimale d'évolution de x_t est:
$$\dot{x}_t = \frac{g(x_t)}{v(x_t)}$$

où $v(x_t) = -\left[\frac{\partial(G_K/G_R)}{\partial(K/R)}.\frac{K/R}{G_K/G_R}\right] = -\frac{xg(x)g''(x)}{g'(x)[g(x)-xg'(x)]}$ est l'élasticité de substitution entre capital et ressource.

4. (2 pts) Afin de résoudre le problème incertain, on se propose de procéder de façon récurrente en commençant par décrire le programme optimal après arrivée du substitut. On peut remarquer qu'il s'agit d'un problème entièrement déterministe puisqu'en T, le substitut est déjà découvert. Ecrire ce programme que l'on note $W(K_T, V_T)$.

5. (2 pts) En remarquant que $f(t)$ est la probabilité que le substitut soit découvert à la date t et que $1 - F(t)$ correspond à la probabilité qu'il ne soit pas encore disponible en t, montrer que le programme optimal global peut s'écrire:

$$\max_{C_t, R_t} \int_0^{\infty} \left[U(C_t)(1 - F(t)) + W(K_t, V_t) f(t)\right] e^{-rt} dt$$

$$slc \begin{cases} \overset{\bullet}{K_t} = G(K_t, R_t) - C_t, & K_0 \text{ donné} \\ \overset{\bullet}{S_t} = -R_t, & S_0 \text{ donné} \\ V_t = S_t \end{cases}$$

6. (3.5 pts) Etablir la nouvelle règle de Keynes-Ramsey en utilisant l'hypothèse que H est une technologie "backstop", i.e. que $W_K = W_S = 0$. La comparer avec le résultat de la question 2 et commenter. Que représente le rapport $f(t) / [1 - F(t)]$?

7. (2.5 pts) Etablir la nouvelle règle d'évolution de x et la comparer avec le résultat obtenu à la question 3.

Eléments de correction

Question 1: Le programme optimal dans le cas certain s'écrit

$$\max_{C_t, R_t} \int_0^\infty U(C_t)\, e^{-rt} dt$$

$$slc \begin{cases} \overset{\bullet}{K_t} = G(K_t, R_t) - C_t, & K_0 \text{ donné} \\ \overset{\bullet}{S_t} = -R_t, & S_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Question 2: Le Hamiltonien de ce programme est donné par

$$H(K, S, \lambda, \mu) = U(C)\, e^{-rt} + \lambda [G(K, R) - C] - \mu R$$

Le conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent:

$$\begin{aligned} \partial H / \partial C &= U'(C)\, e^{-rt} - \lambda = 0 && (1) \\ \partial H / \partial R &= \lambda G_R - \mu = 0 && (2) \\ \partial H / \partial K &= \lambda G_K = -\overset{\bullet}{\lambda} && (3) \\ \partial H / \partial S &= 0 = -\overset{\bullet}{\mu} && (4) \end{aligned}$$

En dérivant (1) par rapport au temps et en utilisant (3), on obtient le résultat escompté.

Question 3: L'homogénéité de degré 1 de la fonction G s'écrit $G(aK, aR) = aG(K, R)$ où a est un scalaire positif. En prenant $a = 1/R$ on trouve

$$g(x_t) = \frac{1}{R_t} G(K_t, R_t) = G\left(\frac{K_t}{R_t}, 1\right)$$

Il apparait clairement que $G_K = g'(x)$ et $G_R = (G - KG_K)/R = g(x) - xg'(x)$, expressions que l'on remplace ensuite dans les équations (2) et (3). On dérive (2) par rapport au temps et l'on utilise (4) ainsi que les nouvelles expressions de (2) et (3) pour montrer le résultat demandé.

Question 4: Le programme s'écrit

$$\begin{aligned} W(K_T, S_T) &= \max_{C_t, Z_t} \int_T^\infty U(C_t)\, e^{-r(t-T)} dt \\ & slc \begin{cases} \overset{\bullet}{K_t} = H(K_t, Z_t) - C_t, \\ \overset{\bullet}{V_t} = M - Z_t, \end{cases} \end{aligned}$$

Question 5: L'objectif du programme optimal global est de maximiser l'espérance de la somme actualisée des flux d'utilité:

$$E \int_0^\infty U(C_t)\, e^{-rt} dt = \int_0^\infty \left[U(C_t)(1 - F(t)) + W(K_t, V_t) f(t) \right] e^{-rt} dt$$

Question 6: Le Hamiltonien de ce programme est donné par

$$H(K, S, \lambda, \mu) = \left[U(C_t)(1 - F(t)) + W(K_t, V_t) f(t) \right] e^{-rt} + \lambda \left[G(K, R) - C \right] - \mu R$$

Le conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent:

$$\begin{aligned} \partial H / \partial C &= U'(C)(1 - F(t))\, e^{-rt} - \lambda = 0 && (5) \\ \partial H / \partial R &= \lambda G_R - \mu = 0 && (6) \\ \partial H / \partial K &= W_K f(t)\, e^{-rt} + \lambda G_K = - \overset{\bullet}{\lambda} && (7) \\ \partial H / \partial S &= 0 = - \overset{\bullet}{\mu} && (8) \end{aligned}$$

Comme la nouvelle technologie est de type "backstop", $W_K \equiv 0$. En dérivant (5) par rapport au temps, on obtient de la même façon qu'à la question 2:

$$\frac{\overset{\bullet}{C_t}}{C_t} = \frac{G_K - \left[r + \frac{f(t)}{1-F(t)} \right]}{\sigma(C_t)}$$

Le terme $\phi(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ représente la probabilité que le substitut apparaisse à la date t sachant qu'il n'a pas été découvert auparavant. Si cette probabilité est constante dans le temps (c'est le cas avec un processus de Poisson), le problème incertain se ramène à un problème certain dans lequel le taux d'actualisation de l'utilité est majoré par cette probabilité. Ceci traduit de plus fortes préférences pour la consommation des périodes présentes. Le programme optimal conduit alors à une politique d'extraction de la ressource plus vorace que celle qui aurait prévalu en l'absence de toute innovation.

Question 7: La nouvelle technologie étant une backstop, elle n'a aucun effet sur l'évolution optimale de x et l'on retrouve le même résultat qu'à la question 3. De fait, seule la condition (5) est différente de celles du problème précédent. Les conditions (6), (7) et (8), nécessaires à l'établissement de l'équation d'évolution de x sont identiques à (2), (3) et (4).