Modèles dynamiques de l'économie

Cours de E. Billette de Villemeur
Maîtrises d'économétrie / Magistère (U.E. 3)
Université de Toulouse I

29 mai 2001

Avertissement: La durée de l'épreuve est de 1h30. Le barème est donné seulement à titre indicatif. La calculatrice est inutile et interdite.

Gestion optimale d'une ressource naturelle renouvelable et aménités

Mots clefs: Optimisation en temps continu, Hamiltonien, Ressource renouvelable, Aménités.

Le terme "aménités" désigne l'ensemble des services non-marchands que peut offrir une ressource naturelle en plus des bénéfices directs liés à son exploitation. Les aménités dépendent clairement des préférences de chacun et peuvent traduire par exemple la valeur esthétique, écologique ou encore récréationnelle de la ressource. L'objet de ce modèle est de montrer que leur présence dans l'économie crée un motif de préservation de la ressource qui modifie la stratégie d'exploitation optimale de cette dernière. Le modèle est inspiré de Lafforgue (2000).

On considère pour cela une ressource renouvelable dont les réserves courantes sont notées S_t. Sa régénération naturelle est dictée par la fonction $f(S_t)$, de classe C^2 et strictement concave en S_t. On suppose que $f(0) = 0$ et qu'il existe un seuil constant de réserve K au-delà duquel $f(S_t) \leq 0$. On suppose que la société consomme directement les quantités de ressource prélevées (il n'y a donc pas de processus de production). Ses préférences courantes sont décrites par la fonction d'utilité $U(C_t)$ où C_t représente le flux de consommation (i.e. le niveau courant des prélèvements). U est strictement croissante et concave en C_t. Le planificateur cherche à maximiser la somme actualisée au taux δ des flux d'utilité courante. Dans tout ce qui suit, on travaillera en temps continu.

1. (2 pts) Tracer la courbe de la fonction d'auto-régénération de la ressource et écrire l'équation dynamique de son stock.

2. (2 pts) Formuler le programme optimal du planificateur et le Hamiltonien qui en découle.

3. (2 pts) En développant les conditions nécessaires d'optimalité de ce programme, montrer que le taux optimal de croissance de la consommation est:

$$\frac{\overset{\bullet}{C_t}}{C_t} = -\frac{1}{\sigma(C_t)}\left[\delta - f'(S_t)\right] \tag{1}$$

   où $\sigma(C_t) = -C_t U''(C_t)/C_t$ est l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation.

4. (2 pts) En supposant $\sigma(C_t) = \sigma$ indépendant de C_t, construire un diagramme de phase dans le plan (S_t, C_t) décrivant la dynamique de l'économie.

5. (4 pts) Définir et caractériser l'état stationnaire du système. Discuter de sa stabilité.

6. (1 pts) Calculer de façon analytique cet état stationnaire en prenant comme fonction particulières: $f(S_t) = S_t \ln(K/S_t)$ et $U(C_t) = \ln C_t$.

7. (4 pts) On suppose à présent que l'état des réserves entre en compte dans les préférences de la société: $U = U(C_t, S_t)$ et que l'utilité marginale de la ressource est positive, créant ainsi une incitation à la préserver. Reformuler le programme optimal et montrer que la consommation optimale doit à présent satisfaire:

$$\frac{\overset{\bullet}{C_t}}{C_t} = -\frac{1}{\sigma(C_t)}\left[\delta - f'(S_t) - \frac{U'_S}{U'_C}\right] \tag{2}$$

   Que représente la rapport $-U'_S/U'_C$?

8. (2 pts) Caractériser la nouvel état stationnaire et indiquer sa position sur le diagramme de phase construit à la question 3. Commenter.

9. (1 pts) En prenant comme précédemment la fonction de régénération $f(S_t) = S_t \ln(K/S_t)$, calculer l'expression du nouvel état stationnaire avec la fonction d'utilité $U(C, S) = \ln(C + S)$. Le comparer avec le cas sans aménité et commenter.

Eléments de correction

1. A chaque instant, le stock de ressource naturelle est à la fois partiellement consommé et partiellement régénéré. On a donc l'équation d'évolution suivante:
$$\frac{dS_t}{dt} = f\left(S_t\right) - C_t$$

2. Le programme du planificateur s'écrit:
$$\max_{C_t} \int_0^{+\infty} U\left(C_t\right) e^{-\delta t} dt$$
Par suite le hamiltonien s'écrit:
$$H\left(S_t, C_t, \lambda_t\right) = U\left(C_t\right) e^{-\delta t} + \lambda_t \left(f\left(S_t\right) - C_t\right)$$

3. La condition du premier ordre (dérivé par rapport à la variable de contrôle C_t) s'écrit:
$$U'\left(C_t\right) e^{-\delta t} = \lambda_t$$
On sait par ailleurs qu'on a le système:
$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} &= \frac{dS_t}{dt} = f\left(S_t\right) - C_t \\ \frac{\partial H}{\partial S_t} &= -\frac{d\lambda_t}{dt} = \lambda_t f'\left(S_t\right) \end{aligned}$$
Par suite, en dérivant la première équation par rapport au temps, on obtient:
$$\frac{dC_t}{dt} U''\left(C_t\right) e^{-\delta t} - \delta U'\left(C_t\right) e^{-\delta t} = \frac{d\lambda_t}{dt} = -\lambda_t f'\left(S_t\right) = -U'\left(C_t\right) e^{-\delta t} f'\left(S_t\right)$$
qui s'écrit bien :
$$\frac{\overset{\bullet}{C_t}}{C_t} = -\frac{1}{\sigma\left(C_t\right)} \left[\delta - f'\left(S_t\right)\right]$$

4. Voir graphiques du TD sur les ressources naturelles.

5. L'état stationnaire s'écrit $\partial/\partial t \equiv 0$ et le niveau de stock correspondant est défini par $f'\left(S_t^*\right) = \delta$. Cet état stationnaire n'est pas stable car si on consomme un peu plus que le niveau $C_t^* = f\left(S_t^*\right)$ alors le niveau de stock décroît ce qui augmente l'écart encore l'écart avec le niveau de consommation de l'état stationnaire. L'instabilité de l'état stationnaire est visible sur le diagramme de phase: c'est un point selle. Cette dernière se démontre rigoureusement en calculant les valeurs propres du système différentiel.

6. Le stock à l'état stationnaire est défini par

$$S^* = K \exp\left[-\left(1+\delta\right)\right]$$

La consommation est définie par

$$C^* = K\left(1+\delta\right)\exp\left[-\left(1+\delta\right)\right] = \left(1+\delta\right)S^*$$

7. Le programme du planificateur s'écrit:

$$\max_{C_t} \int_0^{+\infty} U\left(C_t, S_t\right)e^{-\delta t}dt$$

Par suite le hamiltonien s'écrit:

$$H\left(S_t, C_t, \lambda_t\right) = U\left(C_t, S_t\right)e^{-\delta t} + \lambda_t\left(f\left(S_t\right) - C_t\right)$$

La condition du premier ordre (dérivé par rapport à la variable de contrôle C_t) s'écrit:

$$U_C'\left(C_t, S_t\right)e^{-\delta t} = \lambda_t$$

On sait par ailleurs qu'on a le système:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} &= \frac{dS_t}{dt} = f\left(S_t\right) - C_t \\
\frac{\partial H}{\partial S_t} &= -\frac{d\lambda_t}{dt} = U_S'\left(C_t, S_t\right)e^{-\delta t} + \lambda_t f'\left(S_t\right)
\end{aligned}$$

Par suite, en dérivant la première équation par rapport au temps, on obtient:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dC_t}{dt}U_C'' - \delta U_C'\right)e^{-\delta t} &= \frac{d\lambda_t}{dt} = -\left[U_S'\left(C_t, S_t\right)e^{-\delta t} + \lambda_t f'\left(S_t\right)\right] \\
&= -\left[U_S' + U_C' f'\left(S_t\right)\right]e^{-\delta t}
\end{aligned}$$

qui s'écrit bien :

$$\frac{\overset{\bullet}{C_t}}{C_t} = -\frac{1}{\sigma\left(C_t\right)}\left[\delta - f'\left(S_t\right) - \frac{U_S'}{U_C'}\right]$$

Le rapport des utilités marginales représente le "prix de la ressource" dans son environnement.

8. Le nouvel état stationnaire est caractérisé par un taux de renouvellement marginal plus faible, soit un niveau de stock plus élevé. Tant que $\delta - \frac{U_S'}{U_C'} > 0$, on est sûr que le niveau de consommation sera lui aussi plus élevé.

9. On a $S^* = K\exp\left(-\delta\right)$ et $C^* = \delta S^* = K\delta\exp\left(-\delta\right)$. Si $\delta > 1$, le niveau de consommation est lui aussi plus élevé.