Modèles dynamiques de l'économie
TD $n^o 4$

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 1999-2000

1. Modèles de recherche

1.1. Taux de croissance du salaire et salaire de réserve

L'évolution des salaires est déterminée par l'équation $w_t = \Phi^t w$ où w est le salaire à l'embauche, t est le nombre d'année de travail et Φ un réel supérieur à un. A chaque période, un chômeur a le choix entre recevoir l'allocation chômage c ou accepter l'offre w qui lui est faite. On suppose que la distribution cumulée des salaires à l'embauche $F(w)$ est connue. L'objectif de chaque travailleur est de maximiser

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t\right] \qquad avec \quad 0 < \beta < 1$$

où y_t sont les revenus à la période t. Soit $v(w)$ la valeur optimale de la fonction objectif pour un chômeur qui reçoit l'offre w. Ecrire l'équation de Bellman. Montrer que si deux secteurs diffèrent uniquement par le taux de croissance du salaire (ex: $\Phi_1 > \Phi_2$) alors le secteur avec le plus fort taux de croissance a un plus faible salaire de réserve.
Dans tout le problème, on supposera $\Phi_i \beta < 1$.

1.2. Recherche d'emploi, départ à la retraite et fluctuation du marché.

Un chômeur trouve n offres d'emploi chaque année. Le marché du travail est soumis a des fluctuations: si n est le nombre d'offres d'emploi durant la période t, le nombre d'offres à la période suivante sera m avec une probabilité $\pi_{m,n}$. On suppose que $0 \leq m \leq M$. Donc $\sum_{m=0}^{M} \pi_{m,n} = 1$. (Matrice stochastique générant un chaîne de Markov). A chaque période le chômeur a le choix entre accepter l'offre et travailler jusqu'à la retraite au salaire w ou refuser, toucher les allocations chômage a correspondant à cette période et continuer sa recherche. Il cherche a maximiser la somme de ses revenus actualisée au taux β. On suppose que la distribution des salaires est donnée par $F(w)$. Le nombre d'années séparant le chômeur de l'âge de la retraite est N.

Ecrire l'équation de Bellman en fonction du nombre n d'offres reçues pendant la première année de recherche, du nombre d'années N séparant le travailleur de la retraite et du meilleur salaire w proposé.

Montrer que la stratégie optimale consiste à établir un salaire de réserve $w(n, N)$ qui dépend du nombre d'offres reçues pendant la période courante et qui décroît avec le nombre d'années qui séparent le travailleur de la retraite. Calculer la forme de la valeur de la fonction objectif $v(n, w, N)$ quand la meilleur offre reçue par un chômeur est w. Dans le cas où il n'y a pas de fluctuations ($n = cste$), et où $N = +\infty$, montrer ensuite que le salaire de réserve augmente avec le nombre d'offre n.

1.3. Revenus du patrimoine et recherche d'emploi

A chaque période un chômeur reçoit une offre pour un emploi à vie à un salaire w tiré de la distribution $F(w)$ constante dans le temps. Le travailleur maximise:

$$E\left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(c_t, l_t), \qquad 0 < \beta < 1\right]$$

où c_t est la consommation et l_t le loisir. On suppose qu'il existe des marchés financiers décrits par la variable *i.i.d.* R_t de distribution $H(R)$. La contrainte de budget est donnée par:

$$a_{t+1} \leq R_t (a_t + w_t h_t - c_t)$$

et $l_t + h_t \leq 24$ si la personne travaille. Si elle ne travaille pas, la contrainte de budget s'écrit au contraire $a_{t+1} \leq R_t (a_t + z - c_t)$ et $l_t = 24$ où z est l'allocation chômage. On suppose que la fonction $u(.)$ est bornée et que le patrimoine ne peut pas être négatif: $a_t \geq 0$. (Pas d'emprunt). Ecrire l'équation de Bellman du problème.

2. Eléments de correction

2.1. Taux de croissance du salaire et salaire de réserve

Si le chômeur accepte l'offre ses revenus seront $y_t = \Phi^t w$. En cas d'acceptation, la valeur de la fonction objectif s'écrit $\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \Phi^j w = w/(1-\beta\Phi)$. L'équation de Bellman s'écrit donc:

$$v(w) = \sup \left\{ \frac{w}{1-\beta\Phi}, c + \beta \int v(w') F(dw') \right\}$$

La politique optimale peut donc s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} v(w) &= \frac{\bar{w}}{1-\beta\Phi} \qquad si\ w \leq \bar{w} \\ v(w) &= \frac{w}{1-\beta\Phi} \qquad si\ w \geq \bar{w} \end{aligned}$$

avec, quand $w = \bar{w}$,

$$\frac{\bar{w}}{1-\beta\Phi} = c + \beta \int_0^{\infty} v(w') F(dw') = c + \beta \frac{\bar{w}}{1-\beta\Phi} \int_0^{\bar{w}} F(dw') + \beta \int_{\bar{w}}^{\infty} \frac{w'}{1-\beta\Phi} F(dw')$$

qui s'écrit aussi:

$$\bar{w}(1-\beta) - \beta \int_{\bar{w}}^{\infty} (w' - \bar{w}) F(dw') = (1-\beta\Phi) c$$

Le terme de gauche est une fonction croissante de $\bar{w}$. Donc si $\Phi_1 > \Phi_2$, alors $\bar{w}_1 < \bar{w}_2$ ce qui est d'ailleurs intuitif.

2.2. Recherche d'emploi, départ à la retraite et fluctuation du marché.

Equation de Bellman:

$$v(n, w, N) = \sup \left\{ w \sum_{t=0}^{N} \beta^t, c + \beta \sum_{m=0}^{M} \pi_{m,n} \int v(m, w', N-1) F^m(dw') \right\}$$

On montre que la fonction s'écrit:

$$\begin{aligned} v(n, w, N) &= \left(\sum_{t=0}^{N} \beta^t \right) \bar{w}_N(n) \qquad si \quad w \leq \bar{w}_N(n) \\ v(n, w, N) &= \left(\sum_{t=0}^{N} \beta^t \right) w \qquad si \quad w \geq \bar{w}_N(n) \end{aligned}$$

Par itération (ou récursivement si on considère le temps):

$$v(n, w, 0) = \sup \{w, c\}$$

avec un salaire de réserve $\bar{w}_0 = c$.

$$v(n,w,1) = \sup\left\{w(1+\beta), c+\beta\sum_{m=0}^{M}\pi_{m,n}\int v(m,w',0)\,F^m(dw')\right\}$$

Or le second terme est indépendant de w alors que le premier terme est croissant avec w. Par suite il existe un salaire de réserve $\bar{w}_1(n)$ qui vérifie:

$$\begin{aligned}
(1+\beta)\bar{w}_1 &= c+\beta\sum_{m=0}^{M}\pi_{m,n}\int_0^{+\infty} v(m,w',0)\,F^m(dw') \\
&= c+\beta\sum_{m=0}^{M}\pi_{m,n}\left(c\int_0^{c} F^m(dw')+\int_c^{+\infty} w'F^m(dw')\right) \\
&= c+\beta\sum_{m=0}^{M}\pi_{m,n}\left(c\int_0^{+\infty} F^m(dw')+\int_c^{+\infty} (w'-c)\,F^m(dw')\right) \\
&= c(1+\beta)+\sum_{m=0}^{M}\pi_{m,n}\int_c^{+\infty}(w'-c)\,F^m(dw')
\end{aligned}$$

donc $\bar{w}_1(n) > \bar{w}_0(n)$ etc...

S'il n'y a pas de fluctuations, on a:

$$v(n,w,N) = \sup\left\{w\sum_{t=0}^{N}\beta^t, c+\beta\int v(n,w',N-1)\,F^n(dw')\right\}$$

par suite, si on considère un travailleur représentatif de durée de vie infinie on a:

$$v(n,w,\infty) = \sup\left\{w\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t, c+\beta\int v(n,w',\infty)\,F^n(dw')\right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{w}_\infty(n)}{1-\beta} &= c+\beta\int v(n,w',\infty)\,F^n(w')\,dw' \\
&= c+\frac{\beta}{1-\beta}\bar{w}_\infty(n)\int_0^{\bar{w}_\infty(n)} F^n(dw')+\frac{\beta}{1-\beta}\int_{\bar{w}_\infty(n)}^{\infty} w'F^n(dw') \\
&= c+\frac{\beta}{1-\beta}\bar{w}_\infty(n)+\frac{\beta}{1-\beta}\int_{\bar{w}_\infty(n)}^{\infty}(w'-\bar{w}_\infty(n))\,F^n(dw')
\end{aligned}$$

par suite:

$$\bar{w}_\infty(n)-c = \frac{\beta}{1-\beta}\int_{\bar{w}_\infty(n)}^{\infty}(w'-\bar{w}_\infty(n))\,F^n(dw')$$

On pose

$$h_n(w) = \frac{\beta}{1-\beta}\int_w^{\infty}(w'-w)\,F^n(dw')$$

Comme $F^{n+1}(w') \leq F^n(w')$, le poids est concentré sur les grandes valeur de w' et par suite $h_{n+1}(w) \geq h_n(w)$ pour tout w. La fonction $h_n(w)$ est décroissante en w son point d'intersection avec la droite $w-c$ augmente avec n.

2.3. Revenus du patrimoine et recherche d'emploi

Un choix naturel pour les variables d'état est: (w, a, R, s) où s décrit l'état de la personne (E pour employé, U pour chômeur). Pour un travailleur, on a:

$$\begin{aligned} v\left(w, a, R, E\right) &= \max_{c,l,h,a'} \left\{u\left(c, l\right) + \beta \int v\left(w, a', R', E\right) H\left(dR'\right)\right\} \\ s.c. \quad a' &\leq R\left(a + wh - c\right), \qquad l + h \leq 24 \end{aligned}$$

Pour un chômeur, la fonction valeur est donnée par:

$$v\left(w, a, R, U\right) = \sup \left\{ v\left(w, a, R, E\right), \max_{c} \left\{ u\left(c, 1\right) + \beta \int_{s.c.} \int_{a' \leq R(a+z+c)} v\left(w', a', R', U\right) F\left(dw'\right) H\left(dR'\right) \right\} \right\}$$

On montre que la stratégie optimale consiste à fixer un salaire de réserve $\bar{w}\left(a, R\right)$ qui dépend du patrimoine et du taux d'intérêt.