Modèles dynamiques de l'économie
TD $n^o 3$

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 1999-2000

1. Programmation dynamique: mise en forme récursive.

1.1. Investissement et image de marque

Une entreprise maximise somme actualisée de ses profits. Son objectif est donc donné par:

$$\max \left\{ \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left(p_t q_t - w n_t \right) \right\} \qquad 0 < \beta < 1$$

où $p_t,\ q_t,\ et\ n_t$ sont respectivement le prix, le volume des ventes et le nombre de travailleurs à la période t. Le salaire w est considéré comme fixé. L'entreprise évolue dans un secteur compétitif mais soumis à de forte fluctuations saisonnières. Elle considère donc les prix comme donnés. Ces derniers évoluent suivant une loi connue de tous $p_{t+1} = f(p_t)$. Le capital se déprécie au taux δ. Enfin, la production et les ventes dépendent de k_t et n_t mais aussi du rapport q_t/x_t où x_t est l'investissement (l'entreprise doit entretenir son image de marque). Plus précisement:

$$q_t + x_t \leq g \left[k_t, n_t, \frac{q_t}{x_t} - \frac{q_{t-1}}{x_{t-1}} \right]$$

Ecrire le problème que cherche à résoudre l'entreprise. Etablir l'équation de Bellman et les équations de transition en précisant quelles sont les variables d'état et les variables de contrôle.

1.2. Investissement et information

Une entreprise cotée en bourse cherche à maximiser la somme actualisée (au taux β) de ses dividendes. Ses profits π_t sont soumis à l'impôt au taux τ_t. Du point de vue de la production on sait que le capital se déprécie au taux δ d'une part et que profits et investissements x_t sont liés par l'équation $\pi_t + x_t \leq f(k_t)$ d'autre part. Du point de vue de la fiscalité, on dispose d'éléments d'information z_t permettant d'inférer l'évolution du taux d'imposition. On suppose que $\tau_{t+1} = g(z_t, \epsilon_{t+1})$ où ϵ_t est une variable aléatoire *i.i.d.* non-observable. On note par $F(\tau_{t+1}, z_t)$ la distribution conditionnelle qui en découle. Les éléments d'information (et autres rumeurs) z_t suivent un processus de markov décrit par la fonction de transition $H(z', z) \equiv prob\{z_{t+1} = z' \mid z_t = z\}$.

2. Résolution de l'équation de Bellman dans un cas simple

2.1. Croissance optimale et habitudes de consommation.

Dans son calcul de la politique optimale d'investissement, l'état essaye de prendre en compte l'impact des habitudes de consommation. On suppose que son objectif est donné par:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1}), \qquad 0 &< \beta < 1, \quad \gamma > 0 \\ s.c. \quad c_t + k_{t+1} &\leq Ak_t^\alpha \qquad 0 < \alpha < 1, \quad A > 0 \end{aligned}$$

où $k_0 > 0$ et c_{-1} sont définis par la situation actuelle.

1. Soit $v(k_0, c_{-1})$ la valeur de $\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1})$ quand la politique optimale est suivie. Ecrire l'équation de Bellman en $v(k_0, c_{-1})$.

2. Montrer que la solution est de la forme $v(k_0, c_{-1}) = E + F \ln k + G \ln c_{-1}$ et donc que la politique optimale est de la forme $\ln k_{t+1} = I + H \ln k_t$ où E, F, G, H, et I sont des constantes. Les calculer en fonction de A, α, β et γ. Que remarquez vous sur la politique optimale?

3. Expliquez pourquoi ce dernier résultat peut s'étendre au cas suivant:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (u(c_t) + \gamma v(c_{t-1})), \qquad 0 < \beta < 1, \quad \gamma > 0 \\ s.c. \quad c_t + k_{t+1} \leq f(k_t) \qquad \textit{où } f'(0) = +\infty, \ f' > 0, \ \textit{et } f'' < 0. \end{aligned}$$

3. Eléments de correction

3.1. Investissement et image de marque

Equation de Bellman:

$$\begin{aligned} v(k,z,p) &= \max_{q,x,n}\{pq - wn + \beta v(k',z',p')\} \\ s.c. \quad q + x &\leq g\left[k, n, \frac{q}{x} - z\right]; \quad z' = \frac{q}{x}; \quad k' = (1-\delta)k + x; \quad p' = f(p) \end{aligned}$$

3.2. Investissement et information

$$\begin{aligned} v(k,\tau,z) &= \max_{\pi,x}\left\{(1-\tau)\pi + \beta \iint v(k',\tau',z') F(\tau',z) H(z',z)\, d\tau' dz'\right\} \\ s.c. \quad k' &\leq (1-\delta)k + x; \quad \pi + x \leq f(k) \end{aligned}$$

Notez que z n'intervient ni dans les équations de transition, ni dans la fonction objectif initiale. Pourtant, elle influence les décisions prises et donc a un impact sur l'économie réelle.

3.3. Croissance optimale et habitudes de consommation

1. Par définition:

$$\begin{aligned} v(k_0, c_{-1}) &= \max_{c_t \geq 0}\left\{\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t (\ln c_t + \gamma \ln c_{t-1})\right\} \quad s.c.\ c_t + k_{t+1} \leq A k_t^\alpha \\ &= \max_{c_0,k_1}\{\ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta v(k_1, c_0)\} \quad s.c.\ c_0 + k_1 \leq A k_0^\alpha \end{aligned}$$

2. Pour vérifier la conjecture sur la forme fonctionnelle proposée, il faut montrer qu'il existe un vecteur de paramètres pour lesquels l'équation de Bellman de Bellman est vérifiée:

$$\begin{aligned} E + F \ln k_0 + G \ln c_{-1} &= \max_{c_0,k_1}\{\ln c_0 + \gamma \ln c_{-1} + \beta(E + F \ln k_1 + G \ln c_0)\} \\ s.c.\ c_0 + k_1 &\leq A k_0^\alpha \end{aligned}$$

   La condition du premier ordre s'écrit:

$$\frac{1}{c_0} + \frac{\beta G}{c_0} - \frac{\beta F}{A k_0^\alpha - c_0} = 0$$

   Par suite

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1+\beta G}{1+\beta F+\beta G} A k_0^\alpha = J_0 k_0^\alpha \\ k_1 &= \frac{\beta F}{1+\beta F+\beta G} A k_0^\alpha = J_1 k_0^\alpha \end{aligned}$$

en remplaçant dans la fonction objectif on trouve

$$[\beta E+(1+\beta G)\ln J_0+\beta F\ln J_1]+[\alpha(1+\beta(F+G))]\ln k_0+\gamma\ln c_{-1}$$

Par suite

$$\begin{aligned}E &= \frac{(1+\beta G)\ln J_0+\beta F\ln J_1}{1-\beta}\\ F &= \frac{\alpha(1+\beta G)}{1-\alpha\beta}\\ G &= \gamma\end{aligned}$$

Pour la politique optimale on a donc

$$k_1=\alpha\beta A k_0^{\alpha}$$

qui ne dépend pas de γ ni de la consommation à la période précédente. Ceci est du au fait que l'utilité marginale de c_t ne dépend pas de c_{t-1}.

3. Les deux variables d'état sont c_{t-1} et k_t. Les variables de contrôle sont c_t et k_{t+1}. La fonction d'utilité est séparable en c_t, c_{t-1}. Le choix de c_t est le résultat d'un arbitrage entre consommation aujourd'hui et consommation future. Ce choix ne dépend pas de c_{t-1}. Si l'on veut mesurer l'effet des habitudes de consommation il faudra donc plutôt utiliser une fonction $u(c_t,c_{t-1})$ qui ne soit pas séparable.