Modèles dynamiques de l'économie
TD $n^o 3$

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 2000-2001

Modèle de croissance avec pollution

Un organisme social de planification s'intéresse à l'impact que peut avoir la consommation de la société sur le niveau de pollution auquel elle fait face. Considérons par exemple un bien comme l'essence dont l'externalité polluante est directe, ou bien le papier dont la consommation entraîne un impact plus indirect sur la qualité de l'environnement (possibilité de recyclage). Soient c_t la consommation instantanée de la société et π_t le niveau de pollution mesuré à la date t. Le planificateur cherche donc à établir le couple (c, π) qui maximise le bien-être social sous la contrainte d'accumulation du stock de pollution, soit la programme (P) suivant:

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{\{c_t,\pi_t,t>0\}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\left[u\left(c_t\right)-v\left(\pi_t\right)\right]dt \\ \text{slc} \quad \overset{\bullet}{\pi}_t = ac_t - b\pi_t - d \\ \qquad\quad \pi_0 \text{ donné} \end{array}\right.$$

où β, a, b, d sont des constantes positives. u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et concave en c_t et v est également une fonction de classe$\mathcal{C}^1$ strictement croissante et convexe en π_t. On suppose par ailleurs que $\lim\limits_{C\to\infty} u'(c) = 0$ et que $v'(0) = 0$.

1. Commenter les équations du programme. Ecrire le Hamiltonien de (P) en définissant λ_t comme étant la variable d'état adjointe en valeur actualisée. Le problème est-il convexe?

2. Montrer qu'à l'optimum, on aura $u'(c_t) = -a\lambda_t^* e^{\beta t}$, où λ_t^* est mesurée le long de toute trajectoire optimale. Commenter cette condition d'optimalité.

3. En utilisant les équations de Hamilton, montrer que la consommation optimale satisfait la relation dynamique suivante:

$$u''(c_t)\overset{\bullet}{c}_t = (b+\beta)\,u'(c_t) - av'(\pi_t)\,.$$

4. Montrer que le lieu des couples de points (π, c) tels que $\dot{c}_t = 0$ est une courbe strictement décroissante et que celui des couples de points tels que $\dot{\pi}_t = 0$ est une courbe strictement croissante. Construire un diagramme de phase dans le plan (π, c).

5. Montrer qu'il existe un unique état stationnaire et que celui-si constitue un point selle. Discutez sa stabilité.

6. Ecrire les conditions de transversalité. Quelles sont les caractéristiques des trajectoires optimales de ce problème?

Eléments de correction:

Question 1:

En réécrivant l'équation d'état sous la forme $\overset{\bullet}{\pi}_t = G(c_t, \pi_t)$, on constate que $G_c > 0$ et que $G_\pi < 0$. Le stock de pollution s'accroît à mesure que l'on consomme du bien polluant. On suppose que le milieu naturel a la capacité d'absorber de lui-même les émanations polluantes. Ceci ne veut pas dire pour autant que le flux de pollution ne va pas augmenter. Tout dépend en fait du signe de $a - b$.

Le Hamiltonien du programme (P) s'exprime en valeur actualisée comme suit:

$$H(c_t, \pi_t; \lambda_t) = [u(c_t) - v(\pi_t)]\, e^{-\beta t} + \lambda_t (ac - b\pi - d)$$

où λ_t est la variable adjointe du programme, mesurée en valeur actualisée. On vérifie que le Hamiltonien est bien une fonction concave en c_t et π_t, ce qui suffit pour avoir un programme convexe.

Question 2:

La condition d'optimalité du premier ordre est:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow u'(c_t) = -a\lambda_t e^{\beta t} \tag{0.1}$$

où a est la propension marginale de pollution d'une unité de consommation et $-\lambda_t$ est le coût en terme d'utilité sociale d'une unité supplémentaire de pollution dans l'air (en valeur actualisée). Le long de toute trajectoire optimale, l'UMC courante doit être égale au coût marginal (ou désutilité sociale) de la pollution issue de cette consommation. Cette condition évince toute possibilité d'arbitrage intertemporel entre consommation et émissions polluantes.

Question 3:

Le système d'équations de Hamilton s'écrit:

$$\overset{\bullet}{\lambda}_t = -\frac{\partial H}{\partial \pi} \Leftrightarrow \overset{\bullet}{\lambda}_t = v'(\pi_t)\, e^{-\beta t} + b\lambda_t \tag{0.2}$$

$$\overset{\bullet}{\pi}_t = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Leftrightarrow \overset{\bullet}{\pi}_t = ac_t - b\pi_t - d \text{ avec } \pi_0 \text{ donné} \tag{0.3}$$

Enfin, la condition de transversalité s'écrit: $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_t = 0$.

On dérive l'équation (0.1) par rapport au temps et l'on remplace $\overset{\bullet}{\lambda}_t$ par sa valeur définie en (0.2). Après simplification, on obtient le résultat escompté:

$$u''(c_t)\, \overset{\bullet}{c}_t = (b + \beta)\, u'(c_t) - av'(\pi_t) \tag{0.4}$$

Question 4:

La dynamique de l'économie est décrite par le système d'équations différentielles (0.3)-(0.4). On construit une diagramme de phase dans le plan (π, c) en développant la dynamique de chacune des deux variables de la façon suivante:

$$\overset{\bullet}{\pi}_t \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \Leftrightarrow c_t \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \frac{1}{a}\left(b\pi_t + d\right) \tag{0.5}$$

et

$$\overset{\bullet}{c}_t \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0 \Leftrightarrow u'\left(c_t\right) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \frac{a}{(b+\beta)} v'\left(\pi\right) \tag{0.6}$$

Soit la fonction $g_1(c, \pi) = \overset{\bullet}{\pi}_t$. Soit $c_1(\pi) = \{(c, \pi) / g_1(c, \pi) = 0\}$ la trajectoire tracée dans le plan (π, c) des couples de point (c, π) tels que les variations instantanées du niveau de pollution soient nulles. On vérifie que le long de cette trajectoire, $\frac{dc_1}{d\pi} = \frac{b}{a} > 0$. Le lieu des couples de points (π, c) tels que $\overset{\bullet}{\pi}_t = 0$ peut donc être représenté par une courbe croissante dans le plan (π, c).

On procède de la même façon pour $g_2(c, \pi) = \overset{\bullet}{c}_t$ et l'on démontre que le long de la trajectoire optimale et régulière du point de vue de la consommation, on a:

$$\frac{dc_2}{d\pi} = \frac{1}{u''(c_t)} \frac{a}{(b+\beta)} v'(\pi) < 0$$

puisque u est concave et v croissante. Par conséquent le lieu des couples de points (π, c) tels que $\overset{\bullet}{c}_t = 0$ est représentable par une courbe décroissante dans le plan (π, c).

Question 5:

L'état stationnaire de l'économie, noté (π^*, c^*), est tel que:

$$\left\{ \begin{array}{c} (b+\beta) u'(c^*) = av'(\pi^*) \\ ac^* = b\pi^* + d \end{array} \right.$$

Ce point correspond à l'intersection des courbes décrites par $c_1(\pi)$ et $c_2(\pi)$ qui sont monotones et ont des sens de variation opposés, ce qui assure l'unicité de l'état stationnaire.

Afin de démontrer que (π^*, c^*) constitue un point selle, linéarisons le système dynamique (0.3)-(0.4) autour de cette solution stationnaire. On définit alors le vecteur suivant:

$$F(c, \pi) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{u''(c)} \left[(b+\beta) u'(c) - av'(\pi)\right] \\ ac - b\pi - d \end{array} \right)$$

On en calcule ensuite le Jacobien:

$$DF(c, \pi) = \left(\begin{array}{cc} \frac{(b+\beta)u''^2 - u'''\left[(b+\beta)u'(c) - av'(\pi)\right]}{\left[u''(c)\right]^2} & -\frac{av''}{u''} \\ a & -b \end{array} \right)$$

ce qui, évalué en la solution stationnaire permet d'écrire:

$$DF\left(c^{*},\pi^{*}\right)=\begin{pmatrix}(b+\beta) & -\frac{av''}{u''}\\ a & -b\end{pmatrix}$$

Il suffit alors de vérifier que les valeurs propres de cette matrice sont de signe opposé pour pouvoir conclure que l'on obtient bien un point selle. Ceci n'implique la convergence que pour un seul vecteur directeur et signifie donc que l'état stationnaire est instable.

Question 6:

En observant le diagramme de phase, on constate que l'on ne peut avoir que deux possibilités pour lesquelles il n'y aura pas convergence vers l'état stationnaire (puisque l'on exclut toute solution négative):

$$(i)\left\{\begin{array}{c} c\rightarrow 0\\ \pi\rightarrow 0\end{array}\right. \text{ et } (ii)\left\{\begin{array}{c} c\rightarrow \infty\\ \pi\rightarrow \infty\end{array}\right.$$

Pour montrer que l'optimum est la trajectoire qui converge vers l'état stationnaire, il faut montrer que ces deux possibilités ne vérifient pas la condition de transversalité.

Cas (i) : lorsque $c=\pi=0$, l'équation (0.2) se réécrit: $\overset{\bullet}{\lambda}_t = b\lambda_t \Rightarrow \lambda_t = \lambda_0 e^{\beta t}$ où λ_0 est négatif. Dans ce cas, $\lim_{t\to\infty} \lambda_t = -\infty$, ce qui contredit la condition de transversalité. Le cas (i) est donc une possibilité envisageable, mais qui n'est pas optimale.

Cas (ii) : dans ce cas, (0.2) se réécrit:

$$\overset{\bullet}{\lambda} = v'(\infty)\, e^{-\beta t} + b\lambda \gg \overline{v}' e^{-\beta t} + b\lambda$$

puisque la fonction v est strictement convexe. En résolvant cette équation différentielle on montre que:

$$\lambda_t \gg \lambda_0 e^{bt} + \frac{\overline{v}' e^{bt}}{(b+\beta)}\left[1-e^{-(b+\beta)t}\right]$$

En faisant tendre t vers l'infini, on obtient $\lim_{t\to\infty} \lambda_t \gg \infty$, ce qui contredit également la condition de transversalité.

L'optimum converge vers la solution stationnaire qui est un point selle, donc instable!