

Modèles dynamiques de l'économie

TD n°2

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 1999-2000

Ressources renouvelables:

Des études biologiques ont montré que la dynamique de renouvellement des baleines bleues peut se mettre sous la forme

$$\frac{dZ}{dt} = H(Z) = -\alpha + \beta Z - \gamma Z^2$$

où $\beta^2 > 4\alpha\gamma$.

1. Calculer la population minimale pour pouvoir assurer le renouvellement de l'espèce Z ainsi que la population de long terme en l'absence de toute pêche $\bar{Z}$. Etablir ensuite explicitement l'évolution de la population en fonction de la population Z_0 à la date $t = 0$.
2. Le volume total annuel de pêche s'élève à $Y = F(Z, X) = Z^a X^b$ où $a > 0$, $b < 1$ et X est le nombre total de pêcheurs. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution de la population de baleines lorsque q est le prix de vente, p le coût d'exploitation d'un pêcheur et sous le régime de libre entrée (pas de régulation). Calculer l'équilibre de long terme Z^* quand $a = b = 1/2$, $a = 2b = 1$ et $a = 6b = 3/2$. Commentez en considérant en particulier les situations où $p/q \gg 1$ et $p/q \ll 1$.
3. Calculer le taux marginal de "rendement" propre à la population considérée r c'est à dire le surplus de croissance apporté par une augmentation marginale de la population à la date t . En déduire la taille de la population $\hat{Z}$ pour laquelle la croissance annuelle est maximale. Calculer le taux de croissance moyen ρ et la taille de la population $\check{Z}$ pour laquelle ce taux est maximal. Que peut-on dire sur $\check{Z}$ par rapport à $\hat{Z}$. Quelle est le lien entre ces grandeurs ($r, \rho, \hat{Z}, \dots$) et la production (le volume de pêche). Faire une représentation graphique.

4. On étudie maintenant le cas où le gouvernement cherche à maximiser le bien-être de la population mesuré par la valeur actualisée de l'industrie de pêche (et où les coûts d'exploitation sont négligés). L'objectif est donc:

$$\max \int_0^{+\infty} \exp(-rt) q Y_t dt$$

où r est le taux d'actualisation. Montrer que, dans le cas $\underline{Z} \leq Z_0 \leq \tilde{Z}$ où $\tilde{Z}$ est défini par $H'(\tilde{Z}) = r$, la politique optimale est

$$\begin{aligned} Y_t &= 0 && \text{tant que } Z_t < \tilde{Z} \\ Y_t &= H(Z_t) && \text{dès que } Z_t = \tilde{Z} \end{aligned}$$

En supposant que le gouvernement s'apprête à vendre une concession d'exploitation calculer la valeur actualisée V_0 de la concession en fonction de la population Z_0 . En déduire la valeur marginale s_0 d'un animal dans son milieu naturel.

5. Déduire de la question précédente que pour tout t on a $s_t H(Z_t^*) = r V_t$ où s_t est la valeur marginale d'un animal dans son milieu naturel, Z_t^* la population correspondant à la politique optimale et V_t la valeur actualisée à t de la concession. Etablir l'équation (différentielle) d'arbitrage entre s_t et t et expliquer la dynamique du prix de la baleine dans son environnement s_t par rapport à la valeur marchande d'une prise q .

Eléments de correction

1. Pour assurer le renouvellement de l'espèce il faut que $Z \geq \underline{Z}$ où $\underline{Z}$ est la plus petite racine de $H(Z) = 0$. La population à long terme $\bar{Z}$ est donnée par la plus grande racine. Donc:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{1}{2\gamma} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right) \\ \bar{Z} &= \frac{1}{2\gamma} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} \right)\end{aligned}$$

L'évolution dynamique est définie par l'équation différentielle

$$\frac{dZ}{H(Z)} = \frac{dZ}{-\alpha + \beta Z - \gamma Z^2} = \frac{dZ}{(Z - \underline{Z})(\bar{Z} - Z)} = \frac{1}{(\bar{Z} - \underline{Z})} \left[\frac{dZ}{(Z - \underline{Z})} + \frac{dZ}{(\bar{Z} - Z)} \right] = dt$$

ce qui mène à:

$$Z = \frac{\underline{Z}(\bar{Z} - Z_0) \exp\left[-(\bar{Z} - \underline{Z})t/2\right] + \bar{Z}(Z_0 - \underline{Z}) \exp\left[(\bar{Z} - \underline{Z})t/2\right]}{(\bar{Z} - Z_0) \exp\left[-(\bar{Z} - \underline{Z})t/2\right] + (Z_0 - \underline{Z}) \exp\left[(\bar{Z} - \underline{Z})t/2\right]}$$

2. L'évolution de la population est donné par

$$\frac{dZ}{dt} = H(Z) - Y = H(Z) - F(X, Z)$$

Sous le régime de libre entrée on a:

$$\pi = q \frac{F(X, Z)}{X} - p = q Z^a X^{b-1} - p = 0$$

donc $X = (q/p)^{1/(1-b)} Z^{a/(1-b)}$ et

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha + \beta Z - \gamma Z^2 - \left(\frac{q}{p}\right)^{b/(1-b)} Z^{a/(1-b)}$$

En particulier dans le cas $a = b = 1/2$, la population à l'état stationnaire est la plus grande racine du polynôme:

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha + \beta Z - \gamma Z^2 - \left(\frac{q}{p}\right) Z = 0$$

soit

$$Z^*(p, q) = \frac{1}{2\gamma} \left(\beta - \frac{q}{p} + \sqrt{\left(\beta - \frac{q}{p}\right)^2 - 4\alpha\gamma} \right)$$

Dans le cas $a = 2b = 1$ on considère

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha + \beta Z - \gamma Z^2 - \left(\frac{q}{p}\right) Z^2$$

donc

$$Z^*(p, q) = \frac{1}{2\left(\gamma + \frac{q}{p}\right)} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha \left(\gamma + \frac{q}{p}\right)} \right)$$

et enfin dans le cas $a = 6b = 3/2$, l'équation devient

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha + \beta Z - \gamma Z^2 - \left(\frac{q}{p}\right)^{1/3} Z^2$$

donc

$$Z^*(p, q) = \frac{1}{2\left(\gamma + \left(\frac{q}{p}\right)^{1/3}\right)} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha \left(\gamma + \left(\frac{q}{p}\right)^{1/3}\right)} \right)$$

Dans tous les cas, si $q/p \gg 1$, on cours le risque d'une sur-exploitation. Si $q/p \ll 1$, il y a sous-exploitation. La variable n'est pas assez valorisée. Il n'y a pas de raison pour que Z^* maximise $Y^* = H(Z^*)$.

3. A l'état stationnaire on a donc: $Y^* = H(Z^*)$. Entre la date t et la date $t + 1$, la population croît de $H(Z_t)$. Une augmentation marginale de la population ΔZ_t entraîne un surplus de croissance de $H(Z_t + \Delta Z_t) - H(Z_t)$. Donc

$$r = H'(Z_t) = \beta - 2\gamma Z_t$$

C'est en fait la productivité marginale de Z_t . Le taux de croissance moyen est donné par

$$\rho = H(Z_t) / Z_t = \beta - \alpha / Z_t - \gamma Z_t$$

c'est la productivité moyenne d'un animal dans le cheptel.

4. Le régulateur cherche à maximiser

$$\max \int_0^{+\infty} \exp(-rt) q Y_t dt$$

Dans le cas d'un équilibre stationnaire, la valeur actualisée des profits s'écrit

$$V_0 = qH(\tilde{Z}) \int_0^{+\infty} \exp(-rt) dt = qH(\tilde{Z}) / r$$

S'il n'y a exploitation qu'à partir de la date T , on a:

$$V_0 = qH(\tilde{Z}) \int_T^{+\infty} \exp(-rt) dt = \frac{q}{r} H(\tilde{Z}) e^{-rT}$$

Le fait d'attendre a un double effet: (i) il décale les profits dans le temps donc diminue la valeur actualisée des profits (T augmente); (ii) il permet d'augmenter la population à l'état stationnaire $\tilde{Z}$ ce qui augmente la valeur actualisée des profits. On décide donc d'attendre tant que la perte induite par (i) est plus petite que le gain (ii) Formellement:

$$\frac{dV_0}{dT} = \frac{q}{r} H'(\tilde{Z}) \frac{d\tilde{Z}}{dT} e^{-rT} - qH(\tilde{Z}) e^{-rT}$$

en utilisant $d\tilde{Z}/dT = H(\tilde{Z})$ on obtient le résultat suivant: la population optimale est donc déterminée par

$$H'(\tilde{Z}) = r$$

et la politique optimale est bien de la forme annoncée. Soit T est la date à laquelle la population optimale $\tilde{Z}$ est atteinte:

$$T = \int_{Z_0}^{\tilde{Z}} \frac{dZ}{H(Z)}$$

Par définition

$$s_0 = \frac{dV_0}{dZ_0} = q \frac{H(\tilde{Z})}{H(Z_0)} \exp(-rT) > 0$$

Ce qui permet d'établir la relation suivante

$$s_0 H(Z_0) = rV_0$$

5. On peut faire le même raisonnement pour tout t . Si l'on différentie par rapport à t on trouve:

$$\frac{ds_t}{dt} H(Z_t^*) + s_t \frac{dZ_t^*}{dt} H'(Z_t^*) = r \frac{dV_t}{dZ_t^*} \frac{dZ_t^*}{dt}$$

En remplaçant dZ_t^*/dt par $H(Z_t^*)$ et dV_t/dZ_t^* par s_t on obtient la règle d'arbitrage:

$$\frac{1}{s_t} \frac{ds_t}{dt} + H'(Z_t^*) = r$$

Pour $t > T$ on a $s_t = \tilde{s} = q$: une baleine dans son milieu a autant la même valeur que sur le marché. Pour $t < T$ on a $s_t > q$: une baleine dans son milieu a plus de valeur que son prix de vente sur le marché (donc il n'y a pas exploitation).