

Modèles dynamiques de l'économie

TD n°1

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 1999-2000

L'objet du présent problème est l'étude d'un oligopole dynamique "à la Cournot", avec libre entrée. On considère donc la situation suivante:

- i) N entreprises produisent un bien homogène.
- ii) La demande inverse pour ce bien est donnée par $p(Q) = A - BQ$.
- iii) Les coûts de chaque entreprise sont: $C_i(q_i) = \alpha_i + \beta_i q_i + \gamma_i q_i^2$
auxquels s'ajoute un coût fixe à l'entrée F_i (investissement initial).

Dans tout le problème, on supposera que les entreprises ajustent leur niveau de production q_i pour maximiser leur profits actualisés au taux r . Elles n'entrent sur le marché que si leur valeur actualisée V_i dépasse l'investissement initial.

1. En supposant que les conditions rendant l'investissement favorable sont remplies, calculer les fonctions de réaction provenant de la maximisation du profit. Ecrire les équations d'ajustement décrivant l'évolution de la production.
2. On suppose qu'une entreprise fortement innovante envisage de pénétrer un marché où ne produit pour l'instant qu'un monopole ($N = 2$). Calculer l'évolution des parts de marchés en fonction des fonctions de coûts. En déduire la valeur critique des coûts d'entrée qui pourraient amener l'entreprise à renoncer à son investissement.
3. En réalité, il y a diffusion des connaissances et l'entreprise innovante ne peut profiter de cet avantage que pendant $2k$ périodes. La technologie devient ensuite propriété commune. Calculer la nouvelle valeur critique de l'investissement initial pour l'entreprise innovante.
4. On considère maintenant le cas de N entreprises toutes identiques. Calculer vecteurs propres, valeurs propres et faire une représentation du diagramme des phases. Décrire l'évolution des prix en fonction du prix initial et du nombre d'entreprises. Etudier l'évolution des productions individuelles par rapport à la production moyenne (ou encore l'évolution de la variance de la distribution des productions).

1. Eléments de correction

1.1. Fonction de réaction et équations d'ajustement

Le profit d'une entreprise s'écrit:

$$\pi_i(q_i, q_{j \neq i}) = \left(A - B \left(q_i + \sum_{j \neq i} q_j \right) \right) q_i - (\alpha_i + \beta_i q_i + \gamma_i q_i^2)$$

La condition du premier ordre (qui ici est suffisante) s'écrit:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = -Bq_i + \left(A - B \left(q_i + \sum_{j \neq i} q_j \right) \right) - (\beta_i + 2\gamma_i q_i) = 0$$

La fonction de réaction (ou de meilleure réponse) est donc:

$$q_i = \frac{A - \beta_i - B \sum_{j \neq i} q_j}{2(B + \gamma_i)}$$

A chaque période, toutes les entreprises ajustent leur production en fonction du niveau de production de la période précédente:

$$\begin{pmatrix} q_1^t \\ q_2^t \\ \vdots \\ q_N^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-B}{2(B+\gamma_1)} & \cdots & \frac{-B}{2(B+\gamma_1)} \\ \frac{-B}{2(B+\gamma_2)} & 0 & & \\ & & \cdots & \\ \frac{-B}{2(B+\gamma_N)} & \cdots & \frac{-B}{2(B+\gamma_N)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{t-1} \\ q_2^{t-1} \\ \vdots \\ q_N^{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{A-\beta_1}{2(B+\gamma_1)} \\ \vdots \\ \frac{A-\beta_N}{2(B+\gamma_N)} \end{pmatrix}$$

soit

$$Q^t = MQ^{t-1} + N$$

Calcul des itérés de la fonction:

$$\begin{aligned} Q^1 &= MQ^0 + N \\ Q^2 &= MQ^1 + N = M^2Q^0 + (M+1)N \\ &\vdots \\ Q^t &= M^tQ^0 + \left(\sum_{k=0}^{t-1} M^k \right) N \end{aligned}$$

1.2. Monopole contestable

Dans le cas du duopole on a:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

où $b_1 = B/[2(B + \gamma_1)]$, $b_2 = B/[2(B + \gamma_2)]$, $n_1 = (A - \beta_1)/[2(B + \gamma_1)]$ et $n_2 = (A - \beta_2)/[2(B + \gamma_2)]$. Les valeurs propres sont les solutions de $Z^2 - b_1b_2 = 0$ soit $\lambda^\pm = \pm\sqrt{b_1b_2}$. Les vecteurs propres associés sont $u^\pm = (\mp\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2})$. On

peut décomposer tout vecteur dans l'espace des vecteurs propres. En particulier la production des deux entreprises à la date $t = 0$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(q_2^0/\sqrt{b_2} - q_1^0/\sqrt{b_1} \right) \begin{pmatrix} -\sqrt{b_1} \\ \sqrt{b_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(q_2^0/\sqrt{b_2} + q_1^0/\sqrt{b_1} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{b_1} \\ \sqrt{b_2} \end{pmatrix}$$

Par suite on a:

$$\begin{aligned} q^t &= \frac{1}{2} \left(q_2^0/\sqrt{b_2} - q_1^0/\sqrt{b_1} \right) M^t u^+ + \frac{1}{2} \left(q_2^0/\sqrt{b_2} + q_1^0/\sqrt{b_1} \right) u^- \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(n_2/\sqrt{b_2} - n_1/\sqrt{b_1} \right) \left(\sum_{k=0}^{t-1} M^k \right) u^+ + \frac{1}{2} \left(n_2/\sqrt{b_2} + n_1/\sqrt{b_1} \right) \left(\sum_{k=0}^{t-1} M^k \right) u^- \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} q_1^t &= \left[(\lambda^+)^t + (\lambda^-)^t \right] q_1^0/2 - \left(\sqrt{b_1}/\sqrt{b_2} \right) \left[(\lambda^+)^t - (\lambda^-)^t \right] q_2^0/2 \\ &\quad + \left[\frac{1 - (\lambda^+)^t}{1 - (\lambda^+)} + \frac{1 - (\lambda^-)^t}{1 - (\lambda^-)} \right] n_1/2 - \left(\sqrt{b_1}/\sqrt{b_2} \right) \left[\frac{1 - (\lambda^+)^t}{1 - (\lambda^+)} - \frac{1 - (\lambda^-)^t}{1 - (\lambda^-)} \right] n_2/2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_2^t &= - \left(\sqrt{b_2}/\sqrt{b_1} \right) \left[(\lambda^+)^t - (\lambda^-)^t \right] q_1^0/2 + \left[(\lambda^+)^t + (\lambda^-)^t \right] q_2^0/2 \\ &\quad - \left(\sqrt{b_2}/\sqrt{b_1} \right) \left[\frac{1 - (\lambda^+)^t}{1 - (\lambda^+)} - \frac{1 - (\lambda^-)^t}{1 - (\lambda^-)} \right] q_1^0/2 + \left[\frac{1 - (\lambda^+)^t}{1 - (\lambda^+)} + \frac{1 - (\lambda^-)^t}{1 - (\lambda^-)} \right] q_2^0/2 \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer le prix et les profits. Les valeur nette actualisée (à comparer avec F) s'écrit:

$$V_0 = \sum_{t=0}^{+\infty} r^t \pi^t$$

la valeur critique des coûts d'entrée F est exactement V_0 calculée avec les productions initiales: $q_1^0 = q^M$ quantité de monopole et $q_2^0 = 0$ pour l'entrant.

1.3. Barrière à l'entrée et diffusion des connaissances

S'il y a diffusion des connaissances, on peut écrire jusqu'à $t = k$

$$Q^t = M^t Q^0 + \left(\sum_{k=0}^{t-1} M^k \right) N$$

ensuite on part de q_1^k et q_2^k et on calcule les nouvelles matrices M' et N' avec $b_1 = b_2 = B/[2(B + \gamma_2)]$ et $n_1 = n_2 = (A - \beta_2)/[2(B + \gamma_2)]$. On obtient:

$$Q^{t+k} = (M')^t Q^0 + \left(\sum_{k=0}^{t-1} (M')^k \right) N'$$

Les profits pour l'entreprise innovante dépendent de la durée k pendant laquelle elle peut protéger son invention. Donc plus k est élevé, plus on favorise les innovations, mais plus on limite la diffusion des connaissances.

1.4. Décomposition de la dynamique: cas de N entreprises identiques

- Les valeurs propres sont: $\lambda_1 = -(N-1)b$, et $\lambda_{i>1} = b$ valeur propre multiple. S'il y a beaucoup d'entreprises, il n'y aura donc pas convergence vers l'équilibre.
- Les vecteurs propres associés sont respectivement $v_1 = (1, 1, \dots, 1)$ et $v_i|_{i=2\dots N} = (1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$. Par suite $w_1 = \sum_{i=2}^N v_{1i}/N$ est un vecteur propre de valeur propre associée b .

On peut décomposer le vecteur q^t dans la base des vecteurs propres: $q^t = \sum_i \alpha_i^t v_i$. Notons en particulier que la coordonnée dans la direction du vecteur propre v_1 s'écrit $\alpha_1^t = (\sum_i q_i^t)/N$: c'est la production moyenne qui est directement liée aux prix. Ces derniers évoluent donc comme une variable indépendante et s'ajustent à la vitesse λ_1 . En effet on a $\alpha_1^{t+1} = \lambda_1 \alpha_1^t$.

De même, on montre que $q_1^t - \bar{q}^t$ décroît à la vitesse b (évolution des parts de marché). La variance d'une période à l'autre s'écrit $\sigma_{t+1}^2 = b^2 \sigma_t^2$.

En résumé, la variance décroît de façon régulière mais la production totale et les prix s'ajustent en oscillant (s'il y a convergence). La dynamique de l'ensemble du système peut se décrire comme la somme de ces deux ajustements.