

Modèles dynamiques de l'économie

Maîtrises d'économétrie / Magistère (U.E. 3)
Université de Toulouse I

Septembre 2000

Pour cette épreuve, la calculatrice est inutile mais son usage est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

L'objet du présent problème est l'étude de la diffusion d'un standard. Il est inspiré de Auriol et Benaim (1999).

Le modèle s'écrit comme suit:

On suppose que deux standards A et B sont proposés aux individus. Les individus ont des préférences caractérisées par un coefficient $\delta \in [0, 1]$:

$$U_\delta(A) = (1 - \delta) u_A(x_A) \quad U_\delta(B) = \delta u_B(x_B)$$

où x_A et x_B sont respectivement les parts de marchés du standard A et du standard B et $u_A(x)$ et $u_B(x)$ sont deux fonctions croissantes données. Par hypothèse $x_A + x_B = 1$. On supposera de plus que $u_A(0) = u_B(0) = 0$. On peut vérifier que plus la part de marché est importante, plus un individu a intérêt à adopter ce standard. Notez aussi que plus δ est faible, plus un individu a tendance à préférer A à B . On suppose qu'à chaque période, un consommateur de caractéristique δ se décide pour l'achat d'un appareil (de l'un ou l'autre standard). Le coefficient δ est tiré aléatoirement de la distribution cumulée $F(\delta)$.

1. (2 pts) On suppose qu'il y a déjà N_A individus qui ont adopté le standard A et N_B le standard B . Quelles sont les valeurs de δ pour lesquelles un individu préférera le standard A ? En déduire la probabilité P_A qu'un nouvel acheteur choisisse le standard A .
2. (2 pts) En calculant d'abord $E_t[N_k^{t+1}]$, écrire l'équation dynamique qui décrit l'évolution des parts de marché comme une fonction de x_k^t , de P_A et de $\alpha^t = 1/(N_A^t + N_B^t + 1)$. Quel est le lien entre P_A et x_A à l'état stationnaire?
3. (2 pts) On étudie ici la fonction $g(x) = F \circ \tilde{u}(x)$ sur $[0, 1]$ dans le cas où $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$ (pas de concentration des δ autour des valeurs extrêmes) et où $\tilde{u}(x_A) = u_A(x_A) / [u_A(x_A) + u_B(x_B)]$. Montrer que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et que la fonction $g(x)$ est toujours croissante. Montrer ensuite que l'équation $g(x) = x$ n'admet pas d'autres points fixes que les points triviaux (0 et 1) si $F(\cdot)$ et $\tilde{u}$ sont de même nature *i.e.* toutes deux concaves ou toutes deux convexes.

4. (2,5 pts) On étudie ici l'impact de la "répartition" des consommateurs sur le segment $[0, 1]$. Supposons que le paramètre δ est "concentré sur les extrêmes". Plus précisément, on suppose que la fonction densité $f(x) = F'(x)$ est "en U" (*i.e.* $\exists x_0 \mid f'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$) et vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. On suppose que $u'_A(0) > 0$ et $u'_B(0) > 0$. Montrer que les solutions en coins (0 et 1) sont instables. Montrer ensuite que l'équation $g(x) = x$ a toujours *au moins* une solution stable sur $]0, 1[$. (Dans ce cas les deux standards vont donc coexister).
5. (2,5 pts) On suppose que le paramètre δ est "concentré autour d'une valeur x_0 ", intérieure au segment. Mathématiquement, la fonction densité $f(x) = F'(x)$ est unimodale (*i.e.* $\exists x_0 \mid f'(x) \geq 0$ si $x \leq x_0$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \geq x_0$) et vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que, au contraire, les solutions 0 et 1 sont stables. Montrer alors que si $\tilde{u}(x)$ est convexe sur $[0, x_0]$ et concave sur $[x_0, 1]$ alors l'équation $g(x) = x$ a une unique solution sur $]0, 1[$ qui est instable. (Dans ce cas, tout le monde finira par adopter un unique standard A ou B).
6. (2 pts) On étudie ici l'interprétation économique des propriétés de $\tilde{u}(x)$. On considère les deux situations suivantes: (i) avec probabilité μ le standard A est choisis et tout le monde doit l'adopter, avec probabilité $1 - \mu$ c'est le standard B qui est choisis et tout le monde doit l'adopter. (ii) μ est le pourcentage de la population qui utilise le standard A et $1 - \mu$, le pourcentage qui utilise le standard B. Quelle sera la situation préférée par le consommateur si $\tilde{u}(x)$ est concave? Et si $\tilde{u}(x)$ est convexe?
 Dans le cas où (i) est préférée, il y a aversion à l'incompatibilité (ex: domaine médical), dans le cas où (ii) est préférée, on parlera de tolérance à l'incompatibilité (ex: standard informatique).
7. (2 pts) On se place maintenant dans le cas particulier $F(x) = x$ *i.e.* la densité des paramètres δ est uniforme sur $[0, 1]$. On suppose par ailleurs que les préférences des consommateurs s'écrivent $u_A(x_A) = x_A^2$ et $u_B(x_B) = x_B^2 = (1 - x_A)^2$. Etudier l'éventuelle aversion ou intolérance à l'incompatibilité. Calculer le ou les points stationnaires. Que peut-on dire sur sa (ou leur) stabilité? Que va-t-il se passer?
8. (3 pts) On étudie maintenant la dynamique d'ajustement quand le consommateur tient compte de l'évolution des parts de marché. On suppose que chaque agent δ maximise la somme actualisée de son utilité soit

$$V(\delta, x^0, \alpha^0) = \sup_{k \in \{A, B\}} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t U_k(x^t)$$

avec k le standard choisi par l'agent, $x = x_A$ la part de marché de l'agent A. On note par $(1 - \delta)V_A(x, \alpha)$ et $\delta V_B(x, \alpha)$ la fonction valeur d'un agent qui choisit respectivement les standards A et B. Calculer la probabilité $P'_A(x, \alpha)$ qu'un agent choisisse le standard A. En déduire le système d'équations de Bellman dont les fonctions $V_A(x, \alpha)$ et $V_B(x, \alpha)$ sont solutions.

9. (2 pts) On se place à nouveau dans le cas $F(x) = x$ et $u_A(x) = u_B(x) = x^2$ et on étudie la dynamique d'ajustement autour de $x_A = 0$. Ecrire l'équation qui décrit l'évolution du système quand le consommateur est "myope" et ne considère l'évolution des parts de marché. Faire de même lorsqu'il la prend en compte. Pour cela on utilisera les approximations suivantes des fonctions valeurs:

$$V_A(x, \alpha) = \lambda_A x^2 \quad V_B(x, \alpha) = (1 - \lambda_B x) / (1 - \beta)$$

Faire une approximation du premier ordre en x^t de $E_t[x^{t+1} | x^t]$ et calculer sa solution dans les deux cas. Quelle différence constatez-vous?

1. Correction

1. Les parts de marchés s'écrivent respectivement $x_A = N_A / (N_A + N_B)$ et $x_B = N_B / (N_A + N_B)$. Un individu de caractéristique δ choisit le standard A ssi $U_\delta(A) \geq U_\delta(B)$ soit

$$(1 - \delta) u_A(x_A) \geq \delta u_B(x_B) \quad i.e. \quad \delta \leq \frac{u_A(x_A)}{u_A(x_A) + u_B(x_B)}$$

La probabilité qu'un nouvel acheteur adopte le standard A est donc

$$P_A = F\left(\frac{u_A(x_A)}{u_A(x_A) + u_B(x_B)}\right).$$

2. L'évolution de la population est clairement donnée par:

$$\begin{aligned} E_t[N_A^{t+1}] &= P_A(N_A^t + 1) + (1 - P_A)N_A^t \\ E_t[N_B^{t+1}] &= P_A N_B^t + (1 - P_A)(N_B^t + 1) \end{aligned}$$

et par suite l'évolution des parts de marchés s'écrit:

$$\begin{aligned} E_t[x_A^{t+1}] &= x_A^t(1 - \alpha^t) + P_A \alpha^t = x_A^t + \alpha^t(P_A - x_A^t) \\ E_t[x_B^{t+1}] &= x_B^t(1 - \alpha^t) + (1 - P_A)\alpha^t = x_B^t + \alpha^t(P_B - x_B^t) \end{aligned}$$

où $\alpha^t = 1 / (N_A^t + N_B^t + 1)$

3. Par définition $\tilde{u}(0) = 0$ et $\tilde{u}(1) = u_A(1) / u_A(1) = 1$ car $u_A(0) = u_B(0) = 0$ et $x_B = 1 - x_A$. On déduit naturellement des hypothèses sur F que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Calculons les dérivées de $g(x) = F \circ u$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \tilde{u}'(x) \cdot (F' \circ \tilde{u}(x)) \\ g''(x) &= \tilde{u}''(x) \cdot (F' \circ \tilde{u}(x)) + (\tilde{u}'(x))^2 \cdot (F'' \circ \tilde{u}(x)) \end{aligned}$$

Par ailleurs un calcul direct montre que

$$\tilde{u}'(x) = \frac{u'_A(x) \cdot u_B(1 - x) + u_A(x) \cdot u'_B(1 - x)}{(u_A(x) + u_B(1 - x))^2} \geq 0$$

Puisque F est la distribution cumulée, sa dérivée est positive ou nulle. Par suite $g(x)$ est croissante et si $\tilde{u}(x)$ et $F(x)$ sont convexes (resp. concaves) alors $g(x)$ l'est aussi. Les seuls points fixes sont donc 0 et 1.

4. Les hypothèses sur la fonction F montrent clairement que $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = +\infty$ puisque $\tilde{u}'(0)$ et $\tilde{u}'(1)$ sont strictement positives. De plus $\exists 0 < x < y < 1 \mid g(x) > x$ et $g(y) < y$. Par continuité de la fonction $g(x)$, il existe au moins un point fixe $z \in [x, y]$. Soit z_0 le plus petit point fixe strictement positif tel que $g(x) > x$ si $x < z_0$ et $g(x) < x$ si $x > z_0$ dans un voisinage de z_0 . (c'est à dire que $g(x)$ "traverse" la première bissectrice et ne fait pas que la toucher). Le point z_0 est une solution stable car $0 < g'(z_0) < 1$.

5. On suppose que $f(x) = F'(x)$ est unimodale et vérifie $f(0) = f(1) = 0$. Il s'en suit que $g'(0) = g'(1) = 0$ et les solutions extrêmes de $g(x) = x$ sont toutes deux stables. De plus $\exists 0 < x < y < 1 \mid g(x) < x$ et $g(y) > y$. Par continuité de la fonction $g(x)$, il existe au moins un point fixe $z \in [x, y]$. (la fonction $g(x)$ "traverse" au moins une fois la première bissectrice). Si $\tilde{u}''(x) \geq 0$ sur $[0, x_0]$ et $\tilde{u}''(x) \leq 0$ sur $[x_0, 1]$, c'est aussi le cas pour $g''(x)$. Supposons $g(x_0) < x_0$. La convexité de $g(x)$ sur $[0, x_0]$ impose qu'il n'y ait pas de point d'intersection sur $]0, x_0]$ et la concavité sur $[x_0, 1]$, montre qu'il y a deux points d'intersections sur l'intervalle. Il est facile de montrer que la dérivée au point d'intersection est forcément supérieure à un. (d'où l'instabilité). Même raisonnement si $g(x_0) > x_0$.

6. Le consommateur préfère la situation (i) à la situation (ii) ssi

$$\mu \tilde{u}(0) + (1 - \mu) \tilde{u}(1) > \tilde{u}(\mu)$$

donc si $\tilde{u}$ est convexe et la situation (ii) à la situation (i) dans le cas où $\tilde{u}$ est concave.

7. Par définition $\tilde{u}(x) = x^2 / (x^2 + (1 - x)^2)$ et $g(x) = \tilde{u}(x)$. Les point fixes sont donc solution de l'équation $(2x^2 - 3x + 1)x = (2x - 1)(x - 1)x = 0$. L'étude précise de $g(x)$ donne:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(1-x)}{(x^2 + (1-x)^2)^2} \\ g''(x) &= \frac{2(2x-1)(2x^2 - 2x - 1)}{(x^2 + (1-x)^2)^3} \end{aligned}$$

La fonction est donc convexe sur $[0, 1/2]$ et concave sur $[1/2, 1]$. L'utilité marginale d'un standard est importante quand il est au seuil d'une position dominante. Ici le point $x = 1/2$ est instable, les deux extrêmes sont stables. Il y aura adoption d'un seul standard, celui qui était déjà dominant dans la situation initiale.

8. Le programme d'un consommateur de caractéristique δ s'écrit:

$$V(\delta, x_A^0, \alpha^0) = \sup_{A,B} \left\{ (1 - \delta) E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_A(x_A^t) \right], \delta E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_B(x_B^t) \right] \right\}$$

Par définition $V_A(x_A^0, \alpha^0) = E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_A(x_A^t) \right]$ et $V_B(x_A^0, \alpha^0) = E_0 \left[\sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_B(x_B^t) \right]$. On peut récrire ce programme sous la forme

$$V(\delta, x_A^0, \alpha^0) = \sup_{A,B} \left\{ (1 - \delta) V_A(x_A^0, \alpha^0), \delta V_B(x_A^0, \alpha^0) \right\}$$

Par suite si le consommateur tient compte de l'évolution future des parts de marché la probabilité P'_A que le standard A soit choisit s'écrit

$$P'_A(x_A^0, \alpha^0) = F \left(\frac{V_A(x_A^0, \alpha^0)}{V_A(x_A^0, \alpha^0) + V_B(x_A^0, \alpha^0)} \right)$$

et le système d'équations de Bellman s'écrit:

$$\begin{aligned} V_A(x_A^0, \alpha^0) &= u_A(x_A^0) + \beta [P'_A V_A((1 - \alpha^0)x_A^0 + \alpha^0, \alpha^1) + (1 - P'_A) V_A((1 - \alpha^0)x_A^0, \alpha^1)] \\ V_B(x_A^0, \alpha^0) &= u_B(x_A^0) + \beta [P'_A V_B((1 - \alpha^0)x_A^0 + \alpha^0, \alpha^1) + (1 - P'_A) V_B((1 - \alpha^0)x_A^0, \alpha^1)] \\ &\quad s.l.c. \quad \alpha^1 = \alpha^0 / (1 + \alpha^0) \end{aligned}$$

9. La probabilité de choisir le standard A est donnée respectivement par:

$$P_A = \frac{x^2}{x^2 + (1 - x)^2} \approx x^2 \quad et \quad P'_A = \frac{\lambda_A x^2}{\lambda_A x^2 + (1 - \lambda_B x) / (1 - \beta)} \approx \lambda_A (1 - \beta) x^2$$

L'évolution du système est donnée par

$$E_t(x^{t+1}) = P^t((1 - \alpha^t)x^t + \alpha^t) + (1 - P^t)(1 - \alpha^t)x^t$$

Dans les deux cas, P^t est d'ordre 2 en x^t donc $E_t(x^{t+1}) \approx (1 - \alpha^t)x^t$. C'est la même équation dans les deux cas. Notons que: $\alpha^t = \alpha^0 / (1 + t\alpha^0)$. La solution de $x^{t+1} = (1 - \alpha^t)x^t$ vérifie donc:

$$x^{t+1} = \left(1 - \frac{\alpha^0}{1 + t\alpha^0}\right) x^t = \left(\frac{1 + (t-1)\alpha^0}{1 + t\alpha^0}\right) x^t = \left(\frac{1 - \alpha^0}{1 + t\alpha^0}\right) x^0$$

1. Supposons qu'il y ait une rapide obsolescence des produits et donc que l'on tient davantage compte des choix réalisés au cours des dernières périodes. Formellement, on suppose que le stock de produit se déprécie à la vitesse ρ . On a maintenant

$$\begin{aligned} E_t [N_A^{t+1}] &= P_A (\rho_A N_A^t + 1) + (1 - P_A) \rho_A N_A^t \\ E_t [N_B^{t+1}] &= P_A N_B^t + (1 - P_A) (\rho_B N_B^t + 1) \end{aligned}$$

2. Un consommateur a le choix entre deux standards pour un même produit. Ses préférences en faveur de l'un ou de l'autre sont données par la formule:

$$(A, x_A) \succeq (B, x_B) \iff (1 - \delta) u_A(x_A) \geq \delta u_B(x_B)$$

où δ est le "standard idéal" du consommateur, et x_A et x_B les parts de marché des deux standard respectifs. Le consommateur cherche à maximiser son utilité intertemporelle suivant le programme:

$$\max \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v_t \right\}$$

où $v_t = (1 - \delta) u_A(x_{A,t})$ si le standard A a été choisi en période 0 et $v_t = \delta u_B(x_{B,t})$ si c'est le standard B .

Le consommateur indifférent entre les deux standard est caractérisé par

$$\delta_L(x_{A,0}) = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_A(x_{A,t})}{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_B(x_{B,t}) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_B(x_{B,t})}$$

Si δ est distribué sur $[0, 1]$ suivant la densité $f(\cdot)$, la probabilité qu'un nouvel entrant adopte le standard A est donnée par

$$P_A(x_{A,0}) = F \left(\frac{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_A(x_{A,t})}{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_B(x_{B,t}) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_B(x_{B,t})} \right)$$

où $F(\cdot)$ est la fonction de répartition (distribution cumulée).

Pour le consommateur δ le choix se présente de la manière suivante:

$$\sup \{ (1 - \delta) u_A(x_{A,0}) + (1 - \delta) \beta V_A((1 - \alpha_0) x_{A,0} + \alpha_0), \delta u_B(1 - x_{A,0}) + \beta \delta E[V_B(1 - (1 - \alpha_0) x_{A,0})] \}$$

(1ère étape: décision optimale du consommateur si V_k est connue) Le consommateur indifférent s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta_L(x_{A,0}) &= \frac{V_A(x_{A,0})}{V_A(x_{A,0}) + V_B(1 - x_{A,0})} \\ &= \frac{u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0) x_{A,0} + \alpha_0)}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0) x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0) x_{A,0})} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$P_{A,0}(x_{A,0}) = F\left(\frac{u_A(x_{A,0}) + \beta[V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)]}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta[V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)] + \beta[V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})]}\right)$$

et (deuxième étape: équation d'Euler ou de transition)

$$E(x_{A,1}|x_{A,0}) = x_{A,0} + \alpha_0(P_{A,0} - x_{A,0})$$

et

$$\begin{aligned} V_A(x_{A,0}) &= u_A(x_{A,0}) + \beta[P_{A,0}V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + (1 - P_{A,0})V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0})] \\ V_B(x_{A,0}) &= u_B(1 - x_{A,0}) + \beta[(1 - P_{A,0})V_A((1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})) + P_{A,0}V_B((1 - \alpha_0)(1 - x_{A,0}))] \end{aligned}$$

Si F est uniforme

$$P_{A,0} = \frac{u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}$$

1.1. Essai sur des formes fonctionnelles:

$u_A(x) = u_B = x^2$ et f uniform donc $F = x$

$$P_{A,0} = \frac{x_{A,0} + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)}{1 + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}$$

$$P = \frac{x + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha)}{1 + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha)x)}$$

soit

$$V_A(x) = x + \beta \frac{x + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha)}{1 + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha)x)} V_A((1 - \alpha)x + \alpha)$$

$$+ \beta \left(\frac{1 - x + \beta V_B(1 - (1 - \alpha)x)}{1 + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha)x)} \right) V_A((1 - \alpha)x)$$

$$V_B(x_0) = u_B(1 - x_0) + \beta [(1 - P_{A,0}) V_A((1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})) + P_{A,0} V_B((1 - \alpha_0)(1 - x_{A,0}))]$$

$$V_A^0(x_A) = k_A x_A$$

$$V_B^0(x_A) = k_B (1 - x_A)$$

$$P_{A,0} = \frac{x_{A,0} + \beta k_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)}{1 + \beta k_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta k_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}$$

$$P = \frac{x + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha)}{1 + \beta V_A((1 - \alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha)x)}$$

so that

$$V_A(x_{A,0}) = P_{A,0}(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))$$

$$+ (1 - P_{A,0})(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0}))$$

$$V_B(x_{A,0}) = P_{A,0}(u_B(x_{A,0}) + \beta V_B((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))$$

$$+ (1 - P_{A,0})(u_B(x_{A,0}) + \beta V_B((1 - \alpha_0)x_{A,0}))$$

Pour le consommateur δ le choix est donné par:

$$\sup \left\{ (1 - \delta) u_A(x_{A,0}) + \beta (1 - \delta) EV_A(x_{A,1}), \delta u_B(1 - x_{A,0}) + \beta \delta E[V_B^0(x_{A,1})] \right\}$$

Non V_A est donné par une valeur moyenne. La décision en faveur de A se fait si

$$\delta \leq \frac{u_A(x_{A,0}) + \beta EV_A^0(x_{A,1})}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta (1 - \delta) EV_A^0(x_{A,1}) + \beta \delta E[V_B^0(x_{A,1})]}$$

Par conséquent

$$P_{A,0}(x_{A,0}) = F \left(\frac{u_A(x_{A,0})}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0})} \right) = x_{A,0}$$

et (deuxième étape: équation d'Euler ou de transition)

$$E(x_{A,1} | x_{A,0}) = x_{A,0} + \alpha_0 (P_{A,0} - x_{A,0})$$

et

2. Evolution générale

$$\begin{aligned}
 V_A(x_{A,0}) &= P_{A,0}(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)) \\
 &\quad + (1 - P_{A,0})(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0})) \\
 V_B(1 - x_{A,0}) &= P_{A,0}(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0} - \alpha_0)) \\
 &\quad + (1 - P_{A,0})(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0}))
 \end{aligned}$$

avec

$$P_{A,0} = \frac{u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 V_A(x_{A,0}) &= \frac{(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})} \\
 &\quad + \frac{(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0}))(u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})} \\
 V_B(1 - x_{A,0}) &= \frac{u_A(x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0)(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0} - \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})} \\
 &\quad + \frac{(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0}))(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0} - \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta V_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta V_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}
 \end{aligned}$$

Let $V_A^0 = V_B^0 \equiv 0$

$$\begin{aligned}
 V_A^1(x_{A,0}) &= \frac{u_A(x_{A,0})[u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0})]}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0})} = u_A(x_{A,0}) \\
 V_B^1(1 - x_{A,0}) &= \frac{u_B(1 - x_{A,0})[u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0})]}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0})} = u_B(1 - x_{A,0})
 \end{aligned}$$

Let $V_A^1(x_{A,0}) = u_A(x_{A,0})$ and $V_B^1(1 - x_{A,0}) = u_B(1 - x_{A,0})$

$$\begin{aligned}
 V_A(x_{A,0}) &= \frac{(u_A(x_{A,0}) + \beta u_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))(u_A(x_{A,0}) + \beta u_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta u_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta u_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})} \\
 &\quad + \frac{(u_B(1 - x_{A,0}) + \beta u_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0}))(u_A(x_{A,0}) + \beta u_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0))}{u_A(x_{A,0}) + u_B(1 - x_{A,0}) + \beta u_A((1 - \alpha_0)x_{A,0} + \alpha_0) + \beta u_B(1 - (1 - \alpha_0)x_{A,0})}
 \end{aligned}$$

If $u_A(x) = u_B(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
 V_A(x_{A,0}) &= \frac{(x^2 + \beta((1 - \alpha)x + \alpha)^2)(x^2 + \beta((1 - \alpha)x + \alpha)^2)}{x^2 + (1 - x)^2 + \beta((1 - \alpha)x + \alpha)^2 + \beta(1 - (1 - \alpha)x)^2} \\
 &\quad + \frac{((1 - x)^2 + \beta(1 - (1 - \alpha)x)^2)(x^2 + \beta((1 - \alpha)x + \alpha)^2)}{x^2 + (1 - x)^2 + \beta((1 - \alpha)x + \alpha)^2 + \beta(1 - (1 - \alpha)x)^2}
 \end{aligned}$$

if $\alpha = 0$

$$V_A(x_{A,0}) = \frac{(1+\beta)^2 (x^2 + (1-x)^2) x^2}{\beta (x^2 + (1-x)^2)} = \frac{(1+\beta)^2}{\beta} x^2$$

Assume $V_k^0 = (1+\beta)^2 x^2 / \beta$

$$V_A(x) = \frac{(u_A(x) + \beta V_A((1-\alpha)x + \alpha)) (u_A(x) + \beta V_A((1-\alpha)x + \alpha))}{u_A(x) + u_B(1-x) + \beta V_A((1-\alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1-\alpha)x)} + \frac{(u_B(1-x) + \beta V_B(1 - (1-\alpha)x)) (u_A(x) + \beta V_A((1-\alpha)x))}{u_A(x) + u_B(1-x) + \beta V_A((1-\alpha)x + \alpha) + \beta V_B(1 - (1-\alpha)x)}$$

Assume $V_k^0 = (k/\beta) u_k$

$$V_A(x) = \frac{(u_A(x) + A u_A((1-\alpha)x + \alpha)) (u_A(x) + A u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{u_A(x) + u_B(1-x) + A u_A((1-\alpha)x + \alpha) + B u_B(1 - (1-\alpha)x)} + \frac{(u_B(1-x) + B u_B(1 - (1-\alpha)x)) (u_A(x) + A u_A((1-\alpha)x))}{u_A(x) + u_B(1-x) + A u_A((1-\alpha)x + \alpha) + B u_B(1 - (1-\alpha)x)}$$

If $\alpha = 0$

$$V_A(x) = (1+A) \frac{u_A(x) ((1+A) u_A(x) + (1+B) u_B(1-x))}{((1+A) u_A(x) + (1+B) u_B(1-x))} = (1+A) u_A(x) = \frac{A}{\beta} u_A(x)$$

hence $A = \beta / (1-\beta)$ and

$$V_k = u_k / (1-\beta)$$

Does not change anything

Assume $V_k^0 = u_k / (1-\beta)$:

$$V_A(x) = \frac{((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)} + \frac{((1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)}$$

$$V_A(x) = \frac{((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)} + \frac{((1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)} + \frac{((1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)} - \frac{((1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)) ((1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{(1-\beta) u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta) u_B(1-x) + \beta u_B(1 - (1-\alpha)x)}$$

$$V_A(x) = ((1-\beta)u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha)) \\ + \frac{1}{\beta} \frac{((1-\beta)u_B(1-x) + \beta u_B(1-(1-\alpha)x))(u_A((1-\alpha)x) - u_A((1-\alpha)x + \alpha))}{(1-\beta)u_A(x) + \beta u_A((1-\alpha)x + \alpha) + (1-\beta)u_B(1-x) + \beta u_B(1-(1-\alpha)x)}$$

$$\text{Cas } u_A = u_B = x^2$$

$$V_A(x) = ((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2) \\ + \frac{1}{\beta} \frac{((1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2)((1-\alpha)x^2 - ((1-\alpha)x + \alpha)^2)}{(1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2 + (1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2}$$

$$V_A(x) = ((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2)^2 \\ - \frac{1}{\beta} \frac{(2(1-\alpha)x + \alpha)\alpha((1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2)}{(1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2 + (1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2}$$

$$(1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2 + (1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2 = 1 - 2x + 2x^2 + \alpha\beta(4x(1-x) + \alpha(1-2x+2x^2)) \text{ is true}$$

$$((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2) = x^2 + \beta\alpha(1-x)(2x + \alpha(1-x)) \text{ is true}$$

$$((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2) = x^2(1 - \beta\alpha(2-\alpha)) + 2\beta\alpha(1-\alpha)x + \beta\alpha^2 \text{ is true}$$

$$((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2) = x^2 + 2\alpha\beta x(1-x) + \beta(1-x)^2\alpha^2$$

$$(1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2 + (1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2 = (x^2 + (1-x)^2) + 4\alpha\beta x(1-x) + (\beta(1-x)^2 + \beta x^2)\alpha^2 \text{ is true}$$

$$(2(1-\alpha)x + \alpha)\alpha((1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2) = 2\alpha x(1-x)^2 + (4x^2\beta(1-x) + (1-2(2x^3\beta + 2\beta x(1-x)(1-2x))\alpha^3 + (1-2x)\beta x^2\alpha^4) \text{ is true}$$

$$((1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2) + \frac{1}{\beta} \frac{((1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2)((1-\alpha)x^2 - ((1-\alpha)x + \alpha)^2)}{(1-\beta)x^2 + \beta((1-\alpha)x + \alpha)^2 + (1-\beta)(1-x)^2 + \beta(1-(1-\alpha)x)^2} = \\ ((1-\beta)x^2 + \beta x^2) + (2\beta x(-x+1) + \frac{1}{\beta}((1-\beta)(-x+1)^2 + \beta(-x+1)^2)) \frac{-2x^2 - 2x(-x+1)}{(1-\beta)x^2 + \beta x^2 + (1-\beta)(-x+1)^2 + \beta(-x+1)^2} \\ O(\alpha^2)$$

$$= x^2 + (2\beta x(1-x) - \frac{1}{\beta}(1-x)^2 \frac{2x}{x^2 + (1-x)^2})\alpha \text{ is true}$$

$$x^2 + (2\beta x(1-x) - \frac{1}{\beta}(1-x)^2 \frac{2x}{x^2 + (1-x)^2})\alpha = (2\beta - \frac{2}{\beta})\alpha x + (1 - 2\beta\alpha)x^2 + O(x^3)$$

$$(2\beta - \frac{2}{\beta})\alpha x + (1 - 2\beta\alpha)x^2 = -x \frac{-2\alpha\beta^2 + 2\alpha - \beta x + 2\beta^2 x\alpha}{\beta}$$

$$V_A(x) = (1 - 2\beta\alpha)x^2 - \frac{2}{\beta}(1 - \beta^2)\alpha x$$