Modèles dynamiques de l'économie
"Examen blanc"

Maîtrises d'économétrie / Magistère
Cours de: Etienne B. de Villemeur
Université de Toulouse I

Année 1999-2000

L'objet du présent problème est l'étude d'un modèle de croissance simple, inspiré de Solow (1956) et Swan (1956). Ce modèle met en évidence le fait suivant: en l'absence de progrès technologiques, la décroissance des rendements marginaux pose une limite à la croissance. Il s'agit ici d'étudier avec des outils simples (diagramme de phases, calcul des valeurs propres) la dynamique autour de cet état stationnaire.

Le modèle s'écrit comme suit:

On suppose que la production nationale est caractérisée par la fonction de production $Y = F(K)$ avec $F'(K) > 0$, $F''(K) < 0$, $F(0) = 0$, $\lim_{K \to 0} F'(K) = +\infty$, et $\lim_{K \to +\infty} F'(K) = 0$. La propension à épargner est supposée constante égale à s. Le montant de l'investissement en capital chaque instant est donc donné par $sF(K)$. Le capital se déprécie à un taux δ, supposé lui aussi constant.

1. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution du capital. Tracer dans le repère (K, I), le montant de l'investissement I et la quantité de capital K qui se déprécie à chaque instant. Indiquer sur ce même graphique le sens d'évolution de K (diagramme de phase).

2. Dans cette question (et pour elle seulement), on se place dans le cas particulier suivant: $F(K) = K^\alpha$. Indiquer dans quel intervalle doit se situer α pour vérifier les hypothèses initiales sur F. Calculer l'état stationnaire K^* en fonction de s et de δ.

3. Soit K^* l'état stationnaire. Linéariser l'équation différentielle qui régit l'évolution de $K = K^* - u$ autour de l'équilibre. Etablir la stabilité locale de ce dernier en s'appuyant sur les propriétés générales de la fonction F.

4. Dans la suite du problème, on va rendre le niveau d'épargne s endogène. On considère le problème en temps discret. Le planificateur maximise la fonction d'utilité intertemporelle

$$U = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-e}}{1-e}$$

avec $c_t = (1 - s_t) Y_t$ et $e \geq 0$. Quelles sont les variables de décision de l'agent? Quelles sont celles qui décrivent l'état de l'économie à la date t et sur lesquelles le consommateur n'a aucune influence. Ecrire l'équation de Bellman correspondant à ce problème.

5. En supposant connue la fonction valeur V, calculer l'équation vérifiée par s_t, la propension (endogène) à épargner à la période $t = 0$.

6. Calculer la valeur marginale pour le consommateur du capital à la date zéro k_0. En supposant toujours connue la fonction V, déduire l'équation de transition entre K_t et K_{t+1} (équation d'Euler).

7. Dans le cas où $e = 0$ (pas d'aversion au risque) et pour la technologie $F(K) = K^\alpha$ montrer que, si l'on ignore les contraintes sur s, la fonction V s'écrit sous la forme
$$V(K) = A + BK^\alpha + CK$$
où A, B et C sont des constantes que l'on calculera.

8. A partir des résultats de la fonction précédente, déduire la propension à épargner en fonction du capital au début de la période. Il y a-t-il un état stationnaire? Quelle est la différence avec le cas où la propension à épargner est fixe ? Expliquer pourquoi la fonction d'utilité conduit à ce résultat paradoxal.

9. Dans la suite du problème, on étudie le comportement dynamique du système suivant:
$$K_{t+1} = k_1 + a(K_t - k_1) - b(K_t - k_1)^2$$
avec a et b des constantes strictement positives. Montrer que si $a \leq 4$ alors si $k_1 \leq K_{t=0} \leq k_1 + a/b$ alors K_t reste toujours plus grand que k_1.

10. Dans le cas $0 < a < 1$, calculer le ou les points stationnaires du système et discuter leur stabilité locale.

11. Dans le cas $1 < a < 3$, calculer le ou les points stationnaires du système et discuter leur stabilité locale.

12. On se place dans le cas particulier suivant: $a = 1 + \sqrt{5}$ et $b = 1$. Montrer que les deux points stationnaires sont instables. Calculer $X_{t+2} = K_{t+2} - k_1$ en fonction de $X_t = K_t - k_1$. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme:
$$X_{t+2} = X_t (a - bX_t) P(X_t)$$
où $P(X_t)$ est un polynôme du second degré que l'on calculera.

13. Montrer que les points $x_3 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ et $x_4 = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2$ sont des points fixes de $X_t \mapsto X_{t+2}$. Etudier leur stabilité (locale). En déduire que le système dynamique converge vers un cycle de période deux. Faire une représentation graphique.

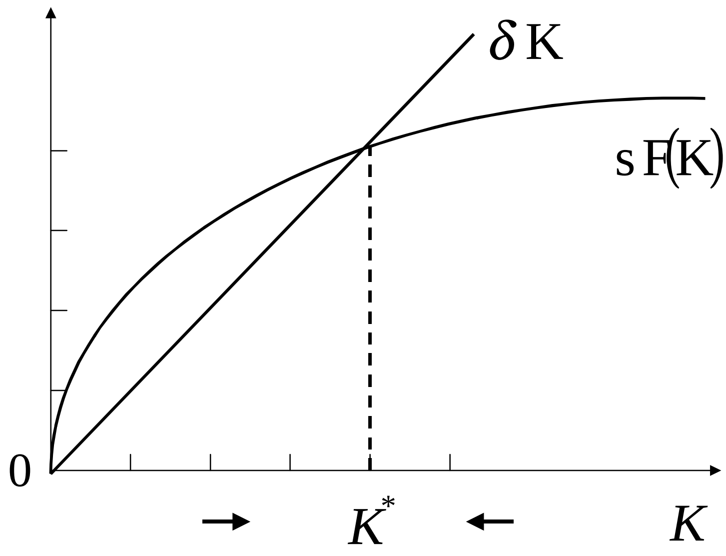


Figure 1.1:

1. Correction

1. L'équation différentielle s'écrit:

$$\frac{dK}{dt} = sF(K) - \delta K$$

2. On a $F'(K) = \alpha K^{\alpha-1}$ et $F''(K) = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}$. Donc $0 < \alpha < 1$. Le point d'équilibre est donné par $sK^{\alpha} - \delta K = 0$. On obtient $K^* = (s/\delta)^{1/(1-\alpha)}$ et donc $Y^* = (s/\delta)^{\alpha/(1-\alpha)}$.

3. Autour du point d'équilibre on a:

$$\begin{aligned} -\frac{du}{dt} &= sF(K^* - u) - \delta(K^* - u) \\ &= s\left[F(K^*) - uF'(K^*) + \frac{u^2}{2}F''(K^* - \breve{u})\right] - \delta(K^* - u) \quad \breve{u} \in [0, u] \end{aligned}$$

soit

$$\frac{du}{dt} = [sF'(K^*) - \delta]u - \frac{sF''(K^* - \breve{u})}{2}u^2 \simeq [sF'(K^*) - \delta]u$$

or on a $F'(K^*) \geq 0$ et $sF'(K^*) \leq \delta$. Par suite $sF'(K^*) - \delta \leq 0$ donc il y a convergence du système dynamique en temps continu. Il y a aussi convergence du système en temps discret car $\|sF'(K^*) + 1 - \delta\| < 1$.

4. Le programme de l'agent représentatif, dans la version discrète du problème s'écrit:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-e}}{1-e} \\ s.c. \quad c_t &= (1-s_t) Y_t; \quad Y_t = F(K_t); \quad K_{t+1} = s_t F(K_t) + (1-\delta) K_t \end{aligned}$$

   Les variables de décisions sont c_t i.e. s_t et par conséquent k_{t+1}. La variable d'état est k_t. L'équation de Bellman s'écrit:

$$\begin{aligned} V(k_0) &= \max_{c_0} \left\{ \frac{c_0^{1-e}}{1-e} + \beta V(k_1) \right\} \quad s.c. \;.... \\ &= \max_{s_0} \left\{ \frac{(1-s_0)^{1-e} F^{1-e}(k_0)}{1-e} + \beta V(s_0 F(k_0) + (1-\delta) k_0) \right\} \end{aligned}$$

5. On suppose V connue. La condition du premier ordre qui permet d'avoir un maximum s'écrit:

$$-(1-s_0)^{-e} F^{1-e}(k_0) + \beta F(k_0) V'(s_0 F(k_0) + (1-\delta) k_0) = 0$$

   On note s_0^* la propension à épargner qui satisfait cette équation.

6. On a:

$$V(k_0) = \frac{(1-s_0^*)^{1-e} F^{1-e}(k_0)}{1-e} + \beta V(s_0^* F(k_0) + (1-\delta) k_0)$$

   Calcul de la dérivée:

$$\begin{aligned} V'(k_0) &= -\frac{\partial s_0^*}{\partial k_0} (1-s_0^*)^{-e} F^{1-e}(k_0) + (1-s_0^*)^{1-e} F^{-e}(k_0) F'(k_0) \\ &\quad + \beta \left(\frac{\partial s_0^*}{\partial k_0} F(k_0) + s_0^* F'(k_0) + 1 - \delta \right) V'(s_0^* F(k_0) + (1-\delta) k_0) \\ &= \frac{\partial s_0^*}{\partial k_0} \left[-(1-s_0^*)^{-e} F^{1-e}(k_0) + \beta F(k_0) V'(s_0^* F(k_0) + (1-\delta) k_0) \right] \\ &\quad + (1-s_0^*)^{1-e} F^{-e}(k_0) F'(k_0) + \beta (s_0^* F'(k_0) + 1 - \delta) V'(s_0^* F(k_0) - \delta k_0) \\ &= (1-s_0^*)^{1-e} F^{-e}(k_0) F'(k_0) + \beta (s_0^* F'(k_0) + 1 - \delta) V'(s_0^* F(k_0) - \delta k_0) \end{aligned}$$

   Le lien entre k_0 et k_1 est donc donné par:

$$\beta (s_0^* F'(k_0) + 1 - \delta) \; V'(k_1) = (1-s_0^*)^{1-e} F^{-e}(k_0) F'(k_0) - V'(k_0)$$

7. Calcul de V dans le cas $e = 0$ et $F(K) = K^\alpha$. On suppose que $V(k) = A + Bk^\alpha + Ck$. Les questions précédentes ont permis d'établir que le niveau optimal d'épargne est donné par:

$$-k_0^\alpha + \beta k_0^\alpha V'(s_0 k_0^\alpha + (1-\delta) k_0) = 0$$

on a donc:

$$-1+\beta\left[\alpha B\left(s_0k_0^\alpha+(1-\delta)\,k_0\right)^{\alpha-1}+C\right]=0$$

soit $s_0^*=\left[(1/\beta-C)\,/\,(\alpha B)\right]^{-1/(1-\alpha)}k_0^{-\alpha}-(1-\delta)\,k_0^{1-\alpha}$ On suppose que c'est toujours possible. En remplaçant s_0^* dans l'expression qui est maximisée, on trouve la fonction valeur:

$$\begin{aligned}
V(k_0) &= (1-s_0)\,k_0^\alpha+\beta V\left(s_0k_0^\alpha+(1-\delta)\,k_0\right)\\
&= \left(1-\left(\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}k_0^{-\alpha}-(1-\delta)\,k_0^{1-\alpha}\right)\right)k_0^\alpha+\beta A\\
&\quad +\beta B\left(\left(\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}k_0^{-\alpha}-(1-\delta)\,k_0^{1-\alpha}\right)k_0^\alpha+(1-\delta)\,k_0\right)^\alpha\\
&\quad +\beta C\left(\left(\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}k_0^{-\alpha}-(1-\delta)\,k_0^{1-\alpha}\right)k_0^\alpha+(1-\delta)\,k_0\right)\\
&= k_0^\alpha+(1-\delta)\,k_0-\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}+\beta A\\
&\quad +\beta B\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-\alpha/(1-\alpha)}+\beta C\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

ce qui se met bien sous la forme annoncée. Par identification des coefficients, on obtient:

$$\begin{aligned}
B &= 1\\
C &= (1-\delta)\\
A &= \frac{1-\beta\,(1-\delta)}{1-\beta}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{(1/\beta)-C}{\alpha B}\right)^{-1/(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

8. La propension à épargner est donnée par la formule:

$$s_0=\left(\frac{(1/\beta)+\delta}{\alpha}\right)^{-1/(1-\alpha)}k_0^{-\alpha}-(1-\delta)\,k_0^{1-\alpha}$$

Si l'on remplace dans l'équation aux différences on trouve

$$k_{t+1}-k_t=sk_t^\alpha+(1-\delta)\,k_t=\left(\frac{\alpha}{(1/\beta)+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

On obtient une croissance régulière, sans limites. En réalité, ce n'est pas possible car la propension à épargner $s(k)$ est supérieure à un pour $k\in[0,1]$. Ceci provient du fait que l'utilité marginale de la consommation est constante et donc le consommateur préfèrerait emprunpter remettre sa consommation à demain même s'il ne consomme rien !!!

9. Posons $X_t = K_t - k_1$. Le système s'écrit:

$$X_{t+1} = aX_t - bX_t^2 = f(X_t)$$

si $K_t \geq k_1$ alors $X_t \geq 0$. Par suite $X_{t+1} \leq \max_X \{aX - bX^2\} = a^2/4b = M$. Si $a \leq 4$, on a $M \leq a/b$ et $aM - bM^2 \geq 0$. Donc

$$X_{t+2} \in [0, M]$$

10. Les points stationnaires du système sont donnés par $X_t = 0$ (soit $K_t = k_1$) et $a - bX_t = 1$ soit $X_t = (a-1)/b < 0$, ce qui est impossible. La stabilité (locale) est donnée par la dérivé de f en ce point. Par suite, comme $f'(X) = a - 2bX$ le point $X_t = 0$ est stable.

11. Si $1 < a < 3$, le point $X_t = 0$ n'est plus stable. Par contre, le point $X_t = (a-1)/b \geq 0$ est stable car

$$\|f'((a-1)/b)\| = \|2 - a\|.$$

12. Si $a = 1 + \sqrt{5} > 3$ aucun des deux points stationnaires n'est stable. Par définition on a:

$$X_{t+1} = aX_{t+1} - bX_{t+1}^2 = a\left(aX_t - bX_t^2\right) - b\left(aX_t - bX_t^2\right)^2$$

et on sait que les point stationnaires de $X_{t+1} = f(X_t)$ le seront aussi pour $X_{t+2} = (f \circ f)(X_t)$. C'est pourquoi on a la factorisation annoncée. Par identification, on trouve aisément:

$$P(X) = a - abX + b^2X^2 = \left(1 + \sqrt{5}\right)(1 - X) + X^2$$

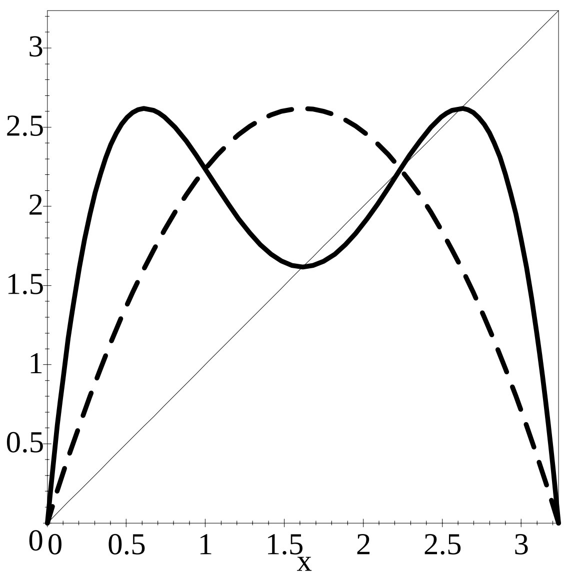
13. Les point fixes de $X_{t+2} = (f \circ f)(X_t)$ sont soit $X_t = 0$ soit définis par

$$1 = (a - bX)P(X).$$

On vérifie que x_3 et x_4 vérifient cette équation. Leur stabilité locale est donnée par la dérivée de $(f \circ f)$ soit:

$$(f \circ f)' = f'.(f' \circ f) = (a - 2bX)\left(a - 2b\left(aX - bX^2\right)\right)$$

Le point x_3 vérifie $f'(x_3) = (a - 2bx_3) = 0$ est donc (très) stable. Le point $x_4 = f(x_3)$ vérifie également $(f \circ f)'(x_4) = 0$. Donc $X_{t+2} = (f \circ f)(X_t)$ converge (localement) vers x_3 ou x_4 et $X_{t+3} = (f \circ f)(X_{t+1})$ converge vers l'autre. On a bien convergence vers un cycle stable de période 2.


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x